Corrigé-type + Barème

Réponse à l'exercice 01 : (PROCESSUS DE POISSON : 05.00 pts)

1. La probabilité que la prochaine requête n'arrive qu'après 1.6 secondes :
   Nous savons que $P(t_2 - t_1 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Ici nous cherchons $P(t_2 - t_1 > t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$
   Ainsi $P(t_2 - t_1 > 1.6) = e^{-2.8\times 1.6} \Rightarrow \boxed{P(t_2 - t_1 > 1.6) = 0.01133341}$ 01.50

2. La probabilité que ce serveur reçoit 02 requêtes dans une période de 1.8 secondes :
   Nous savons que la probabilité d'avoir n évènements dans une période de temps t est donné par : 01.50
   $P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$. Ici $\lambda = 2,8$ requêtes/seconde, $t = 1.8$ secondes et $n = 2$.
   $P_2(1.8) = \frac{(2,8\times 1.8)^2}{2!} e^{-2.8\times 1.8} = 12.7008 \times e^{-5,04} = 12.7008 \times 0.00647374 \Rightarrow \boxed{P_2(1.8) = 0,082221676992}$

3. La probabilité qu'il ne reçoit aucune requête durant 1.8 secondes : De la même manière avec $\lambda = 2,8$, $t = 1.8$ secondes et $n = 0$, nous aurons :
   $P_0(1.8) = \frac{(2.8\times 1.8)^0}{0!} e^{-2,8\times 1.8} = 3,645 \times 0,0672055127 \Rightarrow = \boxed{P_0(1.8) = 0.00647374}$ 02.00

Réponse à l'exercice 02 : (FILE D'ATTENTE : 05.00 pts)

Ce système est modélisé par une file d'attente $M/M/1$

1. Stabilité du système : 01.00
   $\varrho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3.5}{\frac{1}{0.25}} \Rightarrow \boxed{\varrho = 0.875 < 1}$
   Oui, le système est stable.
2. La probabilité que ce serveur soit libre : 01.00
   $P_0 = 1 - \varrho = 1 - 0.875 \Rightarrow \boxed{P_0 = 0.125}$
3. Le nombre moyen de requêtes dans ce système : 01.00
   $\overline{N} = \frac{\varrho}{1-\varrho} = \frac{0.875}{1-0.875} \Rightarrow \boxed{\overline{N} = 7 \text{ requêtes}}$
4. Le temps moyen de réponse du système : 01.00
   $\overline{T} = \frac{\overline{N}}{\lambda} = \frac{7}{3.5} = \boxed{\overline{T} = 2 \text{ s}}$
5. Le nouveaux taux de service qui permet de réduire le temps de résidence de 30% : 01.00
   $\overline{T'} = 0.7 \times \overline{T} \Rightarrow \frac{\lambda}{\mu'} = \frac{7\lambda}{10\mu} \Rightarrow \frac{1}{\mu'} = \frac{7}{10\mu} \Rightarrow \mu' = \frac{10\mu}{7} \Rightarrow \mu' = \frac{10}{7\overline{S}} = \frac{10}{7\times 4} \Rightarrow \boxed{\mu' = 0.35714285 \text{ requêtes/seconde}}$

RÉPONSE À L'EXERCICE 03 : (RÉSEAU DE FILES D'ATTENTE : 10.00 pts)

1. Matrices de routage : 00.75 00.75

   Matrice de routage interne : $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ Matrice de routage externe : $\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0.7 \\ 1 \end{pmatrix}}$

2. Les taux d'arrivée effectifs λ_i : 01.50
   $$\begin{cases} \lambda_1 = \gamma_1 \\ \lambda_2 = \gamma_2 + 0.4\lambda_1 \\ \lambda_3 = 0.6\lambda_1 + 0.3\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 + 0.4 \times 2 \\ \lambda_3 = 0.6 \times 2 + 0.3\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2.8 \\ \lambda_3 = 0.6 \times 2 + 0.3 \times 2.8 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2.8 \\ \lambda_3 = 2.04 \end{cases}}$$

3. Les taux d'utilisation :
   La première file d'attente est de type $M/M/1$, la deuxième file d'attente est de type $M/M/2$ et la troisième file d'attente est de type $M/G/+\infty$. 01.50
   $$\begin{cases} \varrho_1 = \frac{\lambda_1}{m_1\mu_1} \\ \varrho_2 = \frac{\lambda_2}{m_2\mu_2} = \\ \varrho_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \varrho_1 = \frac{2}{3} \simeq 0.666666 < 1 \\ \varrho_2 = \frac{2.8}{2\times 2} = \frac{7}{10} = 0.7 < \\ \varrho_3 = 0 \end{cases}}$$
   $\Rightarrow$ La réseau entier est stable.

4. Le nombre moyen de clients en attente dans chaque station et dans le réseau

   (a) $\overline{Q_1} = \overline{N_1} - \overline{R_1} = \frac{\varrho_1}{1-\varrho_1} - \overline{\varrho_1} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\overline{Q_1} = \frac{4}{3} = 1.33333333}$ 00.25

(b) $P_0(2) = \left[\frac{(m_2\rho_2)^{m_2}}{m_2!(1-\rho_2)} + \sum_{k=0}^{m_2-1}\frac{(m_2\rho_2)^k}{k!}\right]^{-1} = \left[\frac{(2\times 0.7)^2}{2!(1-0.7)} + 1 + 2\times 0.7\right]^{-1} = [3.266666+2.4]^{-1}$

$\Rightarrow \boxed{P_0(2) = 0.1764705}$ 00.25

00.25

$\zeta_2 = \frac{(m_2\rho_2)^{m_2}}{m_2!(1-\rho_2)}P_0(2) = \frac{(2\times 0.7)^2}{2!(1-0.7)} \times 0.1764705 = 3.26666666 \times 0.1764705 \Rightarrow \boxed{\zeta_2 = 0.57647058}$

$\overline{Q_2} = \frac{\zeta_2\varrho_2}{1-\varrho_2} = \frac{0.57647058\times 0.7}{1-0.7} \Rightarrow \boxed{\overline{Q_2} = 1.34509803}$ 00.25

(c) $\boxed{\overline{Q_3} = 0}$ 00.25

(d) $\overline{Q_R} = \sum_{i=1}^{3}\overline{Q_i} = 1.33333333 + 1.34509803 + 0 \Rightarrow \boxed{\overline{Q_R} = 2.6784313633}$ 00.25

5. Le nombre moyen de clients dans chaque file d'attente et dans le réseau :

   (a) $\overline{N_1} = \frac{\varrho_1}{1-\varrho_1} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} \Rightarrow \boxed{\overline{N_1} = 2}$ 00.25

   (b) $\overline{N_2} = \overline{Q_2} + \overline{R_2} = \overline{Q_2} + m_2 \times \varrho_2 = 1.34509803 + 2\times 0.7 \Rightarrow \boxed{\overline{N_2} = 2.74509803}$ 00.25

   (c) $\overline{N_3} = \overline{Q_3} + \overline{R_3} = 0 + \frac{\lambda_3}{\mu_3} = \frac{2.04}{1} \Rightarrow \boxed{\overline{N_3} = 2.04}$ 00.25

   (d) $\overline{N_R} = \sum_{i=1}^{3}\overline{N_i} = 2 + 2.74509803 + 2.04 \Rightarrow \boxed{\overline{N_R} = 6.78509803}$ 00.25

6. Le temps moyen de résidence dans chaque file d'attente et dans le réseau :
   Selon la formule de Little $\overline{N} = \lambda\overline{T} \Rightarrow \overline{T} = \frac{\overline{N}}{\lambda}$. Ainsi :

   (a) $\overline{T_1} = \frac{\overline{N_1}}{\lambda_1} = \frac{2}{2} \Rightarrow \boxed{\overline{T_1} = 1}$ 00.25

   (b) $\overline{T_2} = \frac{\overline{N_2}}{\lambda_2} = \frac{2.74509803}{2.8} \Rightarrow \boxed{\overline{T_2} = 0.98039215}$ 00.25

   (c) $\overline{T_3} = \frac{\overline{N_3}}{\lambda_3} = \frac{1}{\mu_3} = \frac{1}{1} \Rightarrow \boxed{\overline{T_3} = 1}$ 00.25

   (d) $\overline{T_R} = \frac{\overline{N_R}}{\lambda_R} = \frac{\overline{N_R}}{\sum_{i=1}^{2}\gamma_i} = \frac{6.78509803}{4} \Rightarrow \boxed{\overline{T_R} = 1.6962745075}$ 00.25

7. Le temps moyen d'attente dans chaque station et dans le réseau :
   Selon la formule de Little $\overline{Q} = \lambda\overline{W} \Rightarrow \overline{W} = \frac{\overline{Q}}{\lambda}$. Ainsi :

   (a) $\overline{W_1} = \frac{\overline{Q_1}}{\lambda_1} = \frac{1.33333333}{2} \Rightarrow \boxed{\overline{W_1} = 0.66666666}$ 00.25

   (b) $\overline{W_2} = \frac{\overline{Q_2}}{\lambda_2} = \frac{1.34509803}{2.8} \Rightarrow \boxed{\overline{W_2} = 0.48039215}$ 00.25

   (c) $\boxed{\overline{W_3} = 0}$ 00.25

   (d) $\overline{W_R} = \frac{\overline{Q_R}}{\lambda_R} = \frac{\overline{Q_R}}{\sum_{i=1}^{2}\gamma_i} = \frac{2.6784313633}{4} \Rightarrow \boxed{\overline{W_R} = 0.669607840825}$ 00.25

8. La probabilité pour que le réseau ne soit pas vide :
   $Pr(\text{Réseau non vide}) = 1 - Pr(\text{Réseau vide}) = 1 - (Pr(FA_1 \text{ vide et } FA_2 \text{ vide et} FA_2 \text{ vide}))$
   $= (1 - P_0(FA_1) \times P_0(FA_2) \times P_0(FA_3))$
   $Pr(\text{Réseau vide}) = 1 - (1-\rho_1) \times P_0(2) \times P_0(3) = 1 - 0.33333333 \times 0.1764705 \times e^{\frac{-\lambda_3}{\mu_3}}$
   $= 1 - 0.33333333 \times 0.1764705 \times 0.13002871 = 1 - 0.0076487438$
   Ainsi $\boxed{Pr(\text{Réseau non vide}) = 0.992351256}$ 01.00