2) à basse température ($T \ll \theta_D \to x \gg$), $x_D \to \infty$

d'où ; $\int_0^{x_D} \longrightarrow \int_0^{\infty}$ 0,5

$$U(T) = \frac{4N}{\beta^3 \hbar^2 \omega_D^2} \left[\int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{e^x - 1} \simeq \frac{\pi^2}{3} \right]$$

Alors ; $$U(T) = \frac{4N}{\beta^3 \hbar^2 \omega_D^2} \times \frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{3} \times \frac{4N k_B^3 T^3}{k_B^2 \theta_D^2}$$

$$U(T) = \frac{\pi^2}{3} \times \frac{4N k_B}{\theta_D^2} \cdot T^3$$ 0,5

et : $$C_V = \frac{\partial U(T)}{\partial T} = \frac{\pi^2 \times 12 N k_B}{3\,\theta_D^2} \cdot T^2 \longrightarrow C_V \propto T^2$$

$$= \frac{4\pi^2 N k_B}{\theta_D^2} T^2$$ 0,5