II) 1) On a le nombre d'états compris entre k et k+dk d'un cercle est : $g(k)dk = \dfrac{2\pi k dk}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2}$ 0,5 / $L^2 = S$

$\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \rightarrow$ surface occupée par 1 état

d'où : $g(k)dk = \dfrac{S}{2\pi} k dk$ et la densité d'état :

$\boxed{g(k) = \dfrac{S}{2\pi} k}$ est une fonction linéaire de k. 0,5

2) On a dans ce cas le nombre de modes est :

$D(\omega)d\omega = \underbrace{2}_{\text{degré de liberté}} g(k)dk$ 0,5 / $\omega = v_s k$ (Debye) 0,5

$dk = \dfrac{d\omega}{v_s}$

Alors : $\boxed{D(\omega)d\omega = \dfrac{S}{\pi v_s^2} \omega d\omega}$ 0,5 $\quad k\,dk = \dfrac{\omega}{v_s^2} d\omega$

On a : $2N = \displaystyle\int_0^{\omega_D} D(\omega)d\omega = \dfrac{S}{\pi v_s^2}\int_0^{\omega_D} \omega d\omega = \dfrac{S\omega_D^2}{2\pi v_s^2}$ 0,5

Alors : $\boxed{\omega_D^2 = 4\pi \dfrac{N}{S} \cdot v_s^2}$ 0,5 / $n_s = \dfrac{N}{S}$

d'où : $\boxed{\omega_D^2 = v_s^2 \cdot 4\pi n_s}$ / $\omega = v_s k$, $\omega_D = v_s k_D$

d'où : $k_D^2 = 4\pi n_s \longrightarrow k_D = \sqrt{4\pi n_s}$

et $D(\omega)d\omega = \dfrac{S}{\pi v_s^2} \omega d\omega = \dfrac{4N}{4\pi \frac{N}{S} \cdot v_s^2} \omega d\omega$

d'où : $\boxed{D(\omega)d\omega = \dfrac{4N}{\omega_D^2} \cdot \omega d\omega}$ 0,5