Faculté des Sciences Exactes et SNV - Univ. OEB
Département des Mathématiques et Informatique
3ème année Maths Licence - S6 (2022-2023)
Éxamen Méthodes Numériques pour EDO et EDP
Nombre de pages de l'énoncé : 1. Coefficients : 5. crédits : 6.

Le 15-05-2023 de 13 à 14h30

Exercice 1 ***(10 pts)*** *Soit $\beta > 0$. On considère le problème de Cauchy :*

$$y''(t) = -\beta^2 y(t), \text{ pour } t > 0 \text{ ; } y(0) = \lambda \text{ et } y'(0) = \mu. \tag{1}$$

1. *Donner la solution exacte du problème (1).*

2. *Soient h un pas de temps donné et $t_k = kh$. Montrer que (1) peut s'écrire sous la forme*

$$y_{k+1} = 2\alpha y_k - y_{k-1}, k \geq 1 \text{ ; } y_0 = \lambda \text{ et } y_1 = (2\alpha - 1)\lambda + h\mu,$$

   avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. *Soit $y_k = r^k$, déterminer le terme général de la suite (y_k) qui s'écrive sous la forme $y_k = ar_1^k + br_2^k$, pour $k = 0, 1, 2 \cdots$*

4. *Sous quelle condition sur h pour que r_1 et r_2 sont complexes ? (ou la solution y est-elle oscillante).*

Exercice 2 (Transport à vitesse constante) ***(10 pts)*** *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une constante, on considère l'équation linéaire à coefficient constant :*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} y(x,t) + \alpha \frac{\partial}{\partial x} y(x,t) & = & 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ y(x,0) & = & y_0(x) & \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2}$$

Le schéma d'approximation par différences finies sur un maillage régulier de pas Δx en espace et Δt en temps :

$$\begin{cases} \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta t} + \alpha \frac{y_{i,j} - y_{i-1,j}}{\Delta x} = 0 & si \quad \alpha > 0, \\ \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta t} + \alpha \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{\Delta x} = 0 & si \quad \alpha < 0. \end{cases} \tag{3}$$

On note $r = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x}$.

1. *Montrer que la solution y de (2) est constante le long des courbes dites "caractéristiques" définies par : $\forall 0 < s < t, \forall x \in \mathbb{R} : \frac{dY}{ds}(s) = \alpha$ et $Y(t) = x$.*

2. *En déduire que la solution de (2) est $y(x,t) = y_0(x - \alpha t)$.*

3. *Dessiner le stencil du schéma (3), de quel type de schéma s'agit-il ?.*

4. *Par le critère de Fourier-Von Neumann, montrer que le schéma aval (3) (i.e. à droite si $\alpha > 0$ et à gauche si $\alpha < 0$) est L^2-Stable sous une condition sur Δt à préciser (condition de CFL).*

5. *Montrer que le schéma (3) est consistant avec l'équation d'advection (2), précis à l'ordre en espace et en temps.*

Solution 1

1. Les solutions de $y''(t) = -\beta^2 y(t)$ forment un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Elles sont de la forme $y(t) = y(0)\cos(\beta t) + \frac{y'(0)}{\beta}\sin(\beta t)$. Si dans (1), on impose de plus $y(0) = \lambda$ et $y'(0) = \mu$, l'unique solution est alors définie par

$$y(t) = \lambda \cos(\beta t) + \frac{\mu}{\beta}\sin(\beta t),$$

fonction périodique.

2. L'équation $\frac{1}{h^2}(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}) = -\beta^2 y_k$ peut s'écrire $y_{k+1} = 2\alpha y_k - y_{k-1}$ avec

$$\alpha = 1 - \frac{h^2\beta^2}{2}.$$

Ajoutons que $y_0 = \lambda$ et

$$\begin{aligned} y_1 &= \left(-h^2\beta^2 + 2\right) y_0 - y_{-1} \\ &= \left(-h^2\beta^2 + 2\right) y_0 - (y_0 - h\mu) \\ &= \left(-h^2\beta^2 + 1\right) y_0 + h\mu \\ &= \left(1 - h^2\beta^2\right) \lambda + h\mu \\ &= (2\alpha - 1)\lambda + h\mu. \end{aligned}$$

Notons que $\alpha < 1$ puisque $h > 0$.

3. L'ensemble des suites vérifiant $y_{k+1} = 2\alpha y_k - y_{k-1}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2. En recherchant des éléments sous la forme $y_k = r^k$, on trouve 2 solutions distinctes, réelles $r_1 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}, r_2 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}$ si $\alpha < -1$, et complexes $r_1 = \alpha + i\sqrt{1 - \alpha^2}, r_2 = \alpha - i\sqrt{1 - \alpha^2}$ si $\alpha > -1$; enfin on a une racine double quand $\alpha = -1$.

Pour $\alpha \neq -1$, on obtient $y_k = ar_1^k + br_2^k$, et pour $\alpha = -1$, $y_k = (a + kb)(-1)^k$.

Les coefficients a et b sont déterminés par les conditions sur y_0 et y_1. Dans le premier cas

$$(a, b) = \left(\frac{\lambda(r_2 - \alpha) - h\mu}{r_2 - r_1}, \frac{\lambda(\alpha - r_1) + h\mu}{r_2 - r_1}\right).$$

4. Si r_1 et r_2 sont réelles, la solution n'est pas oscillante.

Si par contre

$$\alpha > -1 \Longleftrightarrow h < \frac{2}{\beta},$$

alors $|r_1| = 1$ et nous pouvons écrire $r_1 = e^{i\theta}$. On en déduit que $r_2 = e^{-i\theta}$ si bien que la solution y_k peut s'écrire $y_k = a'\cos(\theta k) + b'\sin(\theta k)$; elle est oscillante.

Solution 2 1. *On a :* $y(x,t) = y_0(x - \alpha t)$

$\partial_t y(x,t) = -\alpha y_0'(x - \alpha t)$ *et* $\partial_x y(x,t) = y_0'(x - \alpha t)$ *donc*

$$\partial_t y(x,t) + \alpha \partial_x y(x,t) = -\alpha y_0'(x - \alpha t) + \alpha y_0'(x - \alpha t) = 0$$

et $y(x,0) = y_0(x - \alpha \times 0) = y_0(x)$.

2. $\frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta t} + \alpha \frac{y_{i,j} - y_{i-1,j}}{\Delta x} = 0$ *donc* $y_{i,j+1} - y_{i,j} + r(y_{i,j} - y_{i-1,j}) = 0$

   donc $y_{i,j+1} = r y_{i-1,j} + (1 - r) y_{i,j} = 0$.

   Le stencil :

$$\begin{array}{ccc} \times & \cdot & \times \\ \cdot & \cdot & \times \\ \times & \times & \times \end{array}$$

   Le type : schéma explicite décentré amont.

3. *La stabilité.* $\lambda^{q+1} e^{ip\theta} = \lambda^q (r e^{i(p-1)\theta} + (1 - r) e^{ip\theta})$

   donc $\lambda = 1 - r + r e^{-i\theta}$.

   On a : $-1 \leq e^{-i\theta} \leq 1 \Longrightarrow 1 - 2r \leq \lambda \leq 1$.

   Donc $|\lambda| \leq 1$ *ssi* $-1 \leq 1 - 2r$ *donc* $r \leq 1$.

   Donc le schéma est stable si la condition CFL $r \leq 1$ *(*$|\alpha| \Delta t \leq \Delta x$*) est satisfaite.*

   Enfin, la stabilité L^2 *se déduit de la stabilité* L^∞.

4. *La consistance d'ordre 1 en temps et en espace est aisée à établir. En effet, dans le cas* $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{i,j} &= \frac{y(x_i, t_{j+1}) - y(x_i, t_j)}{\Delta t} + \alpha \frac{y(x_i, t_j) - y(x_{i-1}, t_j)}{\Delta x} \\ &= \underbrace{(\partial_t + \alpha \partial_x) y(x_i, t_j)}_{=0} + \mathcal{O}(\Delta t + \Delta x) \\ &= \mathcal{O}(\Delta t + \Delta x). \end{aligned}$$

   Donc le schéma est consistant avec l'équation d'advection, précis à l'ordre 1 en espace et en temps, stable et convergent (d'après Lax) en norme L^2 *si la condition CFL* $|\alpha| \Delta t \leq \Delta x$ *est satisfaite.*

Remark 3 *Le cas* $\alpha < 0$ *est identique.*