Corrigé de l'examen d'Analyse 4

14,00 **Solution 1**

1. *Ses fonctions composantes* $f_1 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy$ *et* $f_2 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 3x^2 - 2y + 3$ *étant des fonctions polynômiales,* f *est une fonction différentiable sur* $\mathbb{R}^2$ 0,25

   Donc elle admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *en tout point de* $\mathbb{R}^2$ 0,25

   Sa matrice jacobienne en un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *est :*

$$\mathbf{J}_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$ 1

$$= \begin{pmatrix} y & x \\ 6x & -2 \end{pmatrix}.$$ 0,5

2. *Comme* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *est une fonction différentiable en* $(1,-1,2)$ *et* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *est différentiable en* $g(1,-1,2) = (-1,5)$*, alors par composition* $f \circ g$ *est différentiable en* $(1,-1,2)$ 0,25

   et on a par la règle de dérivation en chaîne :

$$\mathbf{J}_{f\circ g}(1,-1,2) = \mathbf{J}_f\left(g(1,-1,2)\right) \times \mathbf{J}_g(1,-1,2) = \mathbf{J}_f(-1,5) \times \mathbf{J}_g(1,-1,2)$$ 0,5

   Or, par hypothèse,

$$\mathbf{J}_g(1,-1,2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

   et d'après la question précédente,

$$\mathbf{J}_f(-1,5) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix},$$

   d'où

$$\mathbf{J}_{f\circ g}(1,-1,2) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ -14 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$ 0,5

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(f\circ g)}{\partial x}(1,-1,2) &= (1,-14), \\
\frac{\partial(f\circ g)}{\partial y}(1,-1,2) &= (-5,6), \\
\frac{\partial(f\circ g)}{\partial z}(1,-1,2) &= (-2,-4).
\end{aligned}
$$

0,25 0,25 0,25

4,50

Solution 2

1. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $a \in U$ et $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, tel que $[a, a+h] \subset U$. Si $g : U \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2 sur U (au moins dans un voisinage de a),* 0,5

   alors on a la formule de Taylor-Young de second ordre :

   $$g(a+h) = g(a) + h\,\nabla g(a) + \frac{1}{2} h\,\mathbf{H}_g(a)\,h^{\mathrm{t}} + o\left(\|h\|^2\right),$$ 1

   où $\nabla g(a)$ et $\mathbf{H}_g(a)$ désignent respectivement le gradient et la matrice hessienne de g en a et h^{t} le vecteur transposé de h.

2. *La fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \sin(xy) + \cos(xy)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme somme de composées de fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.* 0,25

   On a donc la formule au voisinage de $a = (0,0)$:

   $$
   \begin{aligned}
   g(x,y) &= g((0,0) + (x,y)) \\
   &= g(0,0) + (x\ y)\,\nabla g(0,0) + \frac{1}{2}(x\ y)\,\mathbf{H}_g(0,0)\,(x\ \ y)^{\mathrm{t}} + o\left(\|(x,y)\|^2\right). \quad (1)
   \end{aligned}
   $$ 0,25

   On calcule

   $$
   \begin{aligned}
   g(0,0) &= \sin 0 + \cos 0 = 1, \\
   \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= y\left[\cos(xy) - \sin(xy)\right], \\
   \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= x\left[\cos(xy) - \sin(xy)\right],
   \end{aligned}
   $$ 0,25 0,25

   d'où,

   $$
   \begin{aligned}
   \nabla g(0,0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} \\
   &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
   \end{aligned}
   $$ 0,25 0,25

D'autre part,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = -y^2\left[\sin(xy)+\cos(xy)\right],$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = -x^2\left[\sin(xy)+\cos(xy)\right],$$

0,25

0,25

et d'après le théorème de Schwarz,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(x,y) = \cos(xy)-\sin(xy)-xy\left[\sin(xy)+\cos(xy)\right],$$

0,25

par suite,

$$\mathbf{H}_g(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(0,0) & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

0,25

0,25

Substituant dans (1), il vient :

$$g(x,y) = 1 + (x \quad y)\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x \quad y)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o\left(x^2+y^2\right),$$

soit

$$g(x,y) = 1 + xy + o\left(x^2+y^2\right).$$

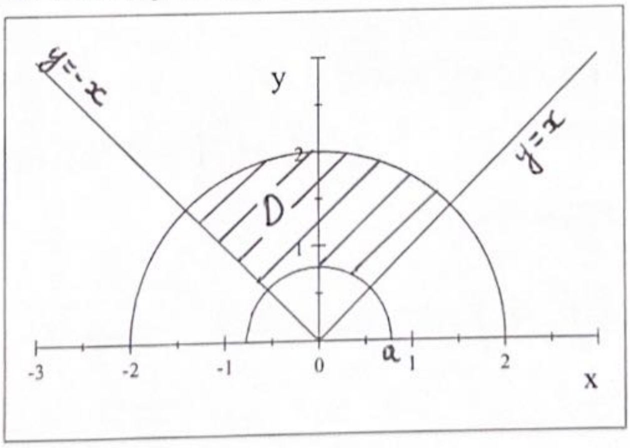
0,25

4,75

Solution 3 *Soit a un paramètre réel tel que $0 < a < 2$ et soit D le domaine du plan $\mathbb{R}^2$:*

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \; ; \; a^2 \le x^2+y^2 \le 4, \; y \ge |x|\right\}.$$

1. *D est la partie hachurée du plan xOy, intersection de la partie du plan située au dessus de la courbe d'équation $y = |x|$ avec la couronne comprise entre les disques centrés à l'origine et de rayons respectifs a et 2.*



1

2. *Compacité de l'ensemble D.* *Introduisons les fonctions définies sur* $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi_1 : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 \qquad \text{et} \qquad \varphi_2 : (x,y) \mapsto y - |x|.$$

Ces fonctions sont clairement continues sur $\mathbb{R}^2$, 0,25

et on a

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; a^2 \le \varphi_1(x,y) \le 4 \text{ et } \varphi_2(x,y) \ge 0\right\} = \varphi_1^{-1}\left([a^2,4]\right) \cap \varphi_2^{-1}\left([0,+\infty[\right)$$ 0,5

Comme $[a^2,4]$ *et* $[0,+\infty[$ *sont des ensembles fermés dans* $\mathbb{R}$, *chacune des parties* $\varphi_1^{-1}\left([a^2,4]\right)$ *et* $\varphi_2^{-1}\left([0,+\infty[\right)$ *est fermée comme image réciproque d'un fermé par une fonction continue.* 0,25

Il s'ensuit que D est fermé comme intersection de deux fermés. 0,25

Par ailleurs, D est une ensemble borné puisque contenu dans la boule $\bar{B}\left((0,0),2\right)$. 0,25

Fermé et borné, D est un ensemble compact. 0,25

3. *En passant en coordonnées polaires*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \text{avec } r \ge 0 \text{ et } \theta \in [0,2\pi[,$$

on obtient grâce à la formule de changement de variables dans une intégrale double

$$\begin{aligned} \text{Aire}(D) &= \iint_D dx\,dy \\ &= \iint_\Delta r\,dr\,d\theta, \end{aligned}$$ 0,25 0,5

où

$$\begin{aligned} \Delta &= \{(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0,2\pi[\;;\; (r\cos\theta, r\sin\theta) \in D\} \\ &= \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0,2\pi[\;;\; a \le r \le 2,\ \frac{\pi}{4} \le \theta \le 3\frac{\pi}{4}\right\} = [a,2] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]. \end{aligned}$$ 0,5

Ainsi, d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \text{Aire}(D) &= \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta\right)\left(\int_a^2 r\,dr\right) \\ &= \frac{\pi}{4}\left(4 - a^2\right). \end{aligned}$$ 0,5 0,25

6,75

Solution 4 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3+3y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Continuité. *La fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant que fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.* 0,25

   Pour étudier la continuité au point $(0,0)$, on écrit pour $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &\leq 2|x| \frac{x^2}{x^2+y^2} + 3|y| \frac{y^2}{x^2+y^2} \\ &\leq 2|x| + 3|y| \qquad (car\ \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1\ et\ \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1) \\ &\leq 3(|x|+|y|) = 3\|(x,y)\|_1 . \end{aligned}$$

   Ceci montre, par le théorème d'encadrement, que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ 1

   et donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$, d'où la continuité de f en $(0,0)$. 0,25

   <u>*Remarque.*</u> *On peut aussi établir la continuité en $(0,0)$ en passant en coordonnées polaires :*

$$|f(x,y)| = |f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = \left| \frac{r^3(2\cos^3\theta + 3\sin^3\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} \right| = r\left|2\cos^3\theta + 3\sin^3\theta\right| \leq 5r,$$

   d'où, $\lim\limits_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0$ et donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.

   <u>*Conclusion.*</u> *f est continue sur $\mathbb{R}^2$.*

2. Calcul des dérivées partielles d'ordre 1. *La fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant que fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. Par suite, f admet en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ des dérivées partielles d'ordre 1.* 0,25

   En $(x,y) \neq (0,0)$, on calcule :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{6x^2(x^2+y^2) - 2x(2x^3+3y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^4+6x^2y^2-6xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \quad 0{,}75 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{9y^2(x^2+y^2) - 2y(2x^3+3y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4x^3y+9x^2y^2+3y^4}{(x^2+y^2)^2}. \quad 0{,}75 \end{aligned}$$

En $(x, y) = (0, 0)$, on calcule les taux d'accroissement pour $t \neq 0$:

$$\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \frac{\frac{2t^3}{t^2} - 0}{t} = 2 \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 2,$$ 0,25

$$\frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \frac{\frac{3t^3}{t^2} - 0}{t} = 3 \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 3.$$ 0,25

Cela prouve que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent et valent respectivement 2 et 3.

Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^4 + 6x^2y^2 - 6xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 2, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{-4x^3y + 9x^2y^2 + 3y^4}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 3, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

3. Etude de la continuité en $(0,0)$ de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

   - *La fonction partielle de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$: $t \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(0,t) = 0$ ne tend pas vers $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2$ lorsque $t \to 0$. Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$.* 0,5
   - *De même, la fonction partielle de $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$: $t \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(t,0) = 0$ ne tend pas vers $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 3$ lorsque $t \to 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(0,0)$.* 0,5

4. *$\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'étant pas continues en $(0,0)$, la fonction f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.* 0,5

5. Etude de la différentiabilité de f en $(0,0)$. *Si f était différentiable en $(0,0)$, alors compte tenu de la deuxième question, sa différentielle en $(0,0)$ est forcément l'application linéaire*

$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\, x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\, y = 2x + 3y,$$ 0,25

et doit vérifier

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - L(x,y)}{\|(x,y)\|_2} = 0.$$ 0,25

Pour $(x,y) \neq (0,0)$, *on calcule*

$$R(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - (2x+3y)}{\|(x,y)\|_2} = \frac{\frac{2x^3+3y^3}{x^2+y^2} - (2x+3y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{xy(2y+3x)}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Il est facile de voir que

$$\lim_{x\to 0^+} R(x,x) = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{5x^3}{(2x^2)^{3/2}}\right) = -\lim_{x\to 0^+}\frac{5}{2\sqrt{2}} = -\frac{5}{2\sqrt{2}},$$

ce qui montre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} R(x,y) \neq 0$. *Par conséquent,* f *n'est pas différentiable en* $(0,0)$.

1

Remarque. On peut aussi raisonner en passant en écriture polaire, pour obtenir

$$R(r\cos\theta, r\sin\theta) = -\cos\theta\sin\theta(2\sin\theta + 3\cos\theta) = -(2\cos\theta\sin^2\theta + 3\sin\theta\cos^2\theta),$$

dont la limite n'est clairement pas nulle en $r \to 0$ *(fixer par exemple* $\theta = \frac{\pi}{4}$ *pour trouver* $R(r\cos\theta, r\sin\theta) = -\frac{5}{2\sqrt{2}}$*). Donc,* f *n'est pas différentiable en* $(0,0)$.