Université Oum El Boughi
Faculté des SE et des SNV

Département de MI L3 mathématiques (S6)

Corrigé type de contrôle (ITOL)

Exercice 1(7pt)
i- On a
$$\langle B_n x,\, x\rangle \geq 0,\ \forall x \in H,\ \forall n \geq 1. \tag{1}$$
Si B_n **vérifie** (1) B_n **est continu**.
Comme H est un espace de Hilbert(donc de Banach) pour montrer que $B_n; \forall n \geq 1$ est continu il suffit de montrer qu'il est fermé i.e.

$$\text{Si } x_n \to x \text{ et } B_n x_n \to f \Rightarrow f = B_n x,$$

D'aprés la relation (1), on a $\forall (x, y) \in H^2$

$$0 \leq \langle B_n(x_n - y),\, x_n - y\rangle \to \langle f - B_n y,\, x - y\rangle;$$

soit $x = y + tz$ pour $(t, z) \in \mathbb{R} \times B(0, 1)$, alors

$$\langle f - B_n y,\, x - y\rangle = t\langle f - B_n x, z\rangle - t\langle B_n z,\, tz\rangle \geq 0;$$

1-Pour $t > 0$, On a
$$\langle f - B_n x, z\rangle - \langle B_n z,\, tz\rangle \geq 0,$$
On fait tendre $t \to 0$ on obtient

$$\langle f - B_n x, z\rangle \geq 0, \forall z \in B(0, 1).$$

2-Pour $t < 0$, On a
$$\langle f - B_n x, z\rangle - \langle B_n z,\, tz\rangle \leq 0,$$
On fait tendre $t \to 0$ on obtient

$$\langle f - B_n x, z\rangle \leq 0, \forall z \in B(0, 1).$$

Donc
$$\langle f - B_n x, z\rangle = 0, \forall z \in B(0, 1) \Rightarrow f = B_n x.$$

Alors B_n est fermé $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
ii- B_n est continu, donc d'aprés le Théorème de Banach Steinhauss, qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\sup_n \|B_n\|_{L(H)} \leq M$, donc

$$\|B_n x\| \leq M\|x\|, \forall x \in H \text{ et } \forall n \geq 1. \tag{2}$$

Comme $\|\cdot\|$ est continu, alors par passage à la limite dans (2), on obtient

$$\|Bx\| \leq M\|x\|,\ \forall x \in H \text{ et} \forall n \geq 1, \tag{3}$$

donc B est continu. De plus on a

$$\|B_n x\| \leq \|B_n\|_{L(H)}\|x\|,\ \forall x \in H \text{ et} \forall n \geq 1,$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|B_n x\|}{\|x\|} \leq \liminf_n \|B_n\|_{L(H)} = C,$$

donc

$$\|B\|_{L(H)} \leq C. \tag{4}$$

iii-Comme B est continu, T^* est bien défini et on a la relation

$$\langle Bx,\, y\rangle = \langle x,\, B^*y\rangle,\, \forall (x,y) \in H^2. \tag{5}$$

Pour montrer $B^* = B$, posons $g(x,y) = \langle Bx, y\rangle$, et montrons :
a- g **hermétienne si et seulement si (ssi)** $B = B^*$.
$B = B^* \Rightarrow g$ hermitienne.

$$\begin{aligned} g(x,y) = \langle Bx, y\rangle = \langle x, By\rangle &= \overline{\langle By, x\rangle} \\ &= \overline{g(y,x)}, \end{aligned}$$

donc g est hermitienne.
g hermitienne $\Rightarrow B = B^*$

$$\langle Bx, y\rangle = g(x,y) = \overline{g(x,y)} = \overline{\langle By, x\rangle} = \langle x, By\rangle = \langle B^*x, y\rangle, \forall x, y \in H,$$

donc $B = B^*$.
b-$\langle Bx, x\rangle \geq 0 \Rightarrow g$ **hermétienne.**
Posons $\Psi(x,y) = g(x,y) - \overline{g(y,x)}$, alors Ψ est une forme sesquilinéaire et $\forall x \in H \Psi(x,x) = 0$ par l'indentité de polarisation

$$\Psi(x,y) = \frac{1}{4}[\Psi(x+y, x+y) + \Psi(x-y, x-y),]$$

on obtient $g(x,y) = \overline{g(y,x)}$, donc g est hermitienne et $B^* = B$.

Exercice 2(7pt)
1.1-Montrons $a \Rightarrow b$.
S est inversible $\Rightarrow \exists S^{-1}; S\circ S^{-1} = I_d(H)$ donc $(S^{-1})^* \circ S^* = I_d^*(H^*)$, comme $H^* \equiv H$, donc $I_d^*(H^*) = I_d(H)$; alors $(S^*)^{-1} = (S^{-1})^*$.

1.2- Montrons $b \Rightarrow a$

$S^* = B$ est inversible alors

$$\exists B^{-1} : B \circ B^{-1} = I_d(H),$$

donc $((S^*)^{-1})^* \circ S^{**} = I_d(H)$, alors

$$(S^{**})^{-1} = S^{-1} = ((S^*)^{-1})^*,$$

car S est continu donc fermé alors $S^{**} = S$ est inverssible.

2.1- Montrons $a \Rightarrow c$

S est inversible alors $\exists S^{-1}$

$$\|S^{-1}y\| \leq \|S^{-1}\|\|y\|, \forall y \in H,$$

or $\exists x : y = Sx$, donc

$$\|Sx\| \geq \|S^{-1}\|^{-1}\|x\|.$$

De même pour S^* on a $\|S^*x\| \geq \|(S^*)^{-1}\|\|x\|$. Soit, donc

$C = \min(\frac{1}{\|(S^*)^{-1}\|}, \frac{1}{\|(S)^{-1}\|})$, alors

$$\begin{cases} (i)\ \|Sx\| \geq C\|x\|, \forall x \in H \\ (ii)\ \|S^*x\| \geq C\|x\|,\ \forall x \in H. \end{cases} \tag{6}$$

2.2- Montrons $c \Rightarrow a$

$R(S)$ **est fermé**

Soit $(x_n) \subset H$ telle que $Sx_n \to y \in H$. La suite (Sx_n) est en particulier de Cauchy, i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n, m \geq n_0$ on a $\|Sx_n - Sx_m\| \leq \varepsilon$.

Il résulte de (6) (i) que $\|x_n - x_m\| \leq \frac{\varepsilon}{c}$ donc (x_n) est de Cauchy dans un complet elle converge vers x et on a $Sx_n \to Sx$ (S continu), alors $y = Sx$ (H est séparé). Donc $R(S)$ est fermé.

$R(S)$ **est dense**

D'apés un Corollaire de Hahn-Banach il suffit de montrer que $R(S)^{\perp} = \{0\}$. Comme on a $R(S)^{\perp} = Ker(S^*)$ d'aprés (6)(ii) S^* est injectif alors $R(S)^{\perp} = \{0\}$. Donc S est surjectif, or (6) (i) implique S est injectif, alors S est bijectif et S^{-1} est continu car

$$\forall y \in H\ \|S^{-1}y\| = \|x\| \leq \frac{1}{c}\|y\| \text{ et } \|S^{-1}\| \leq \frac{1}{c}.$$

Par conséquent S est inversible.

Exercice 3(6pt)

Soit H un espace de Hilbert sur le corps $\mathbb{C}$, et soit $T \in L(H)$.

1- Montrons que T^* l'adjoint de T est bien défini.

Comme $T \in L(H)$, alors $D(T) = H$, alors si T^* existe, il est unique. On a

$$D(T^*) = \{v \in H^* \equiv H : \exists c > 0 : |\langle Tx, v\rangle| \leq c\|x\|; \forall x \in D(T)\},$$

comme $|\langle Tx, v\rangle|\| \leq \|v\|\|T\|\|x\| < \infty$ car T et v sont linéaires contonus ; donc il suffit de prendre $c \geq \|v\|\|T\|$. et par suite $D(T^*) = H$. par conséquent T^* est bien défini (il est continu). Et on a

$$\langle Tx, v\rangle = \langle x, T^*v\rangle, \forall x, v \in H. \tag{7}$$

2-a-Determinons le spectre de T^*, $\sigma(T^*)$.

On a $\mathbb{C} = \rho(T) \cup \sigma(T) : \rho(T) \cap \sigma(T) = \varnothing$, alors $\lambda\sigma(T) \Leftrightarrow \lambda \in \rho(T)$.

Tout d'abord montrons que $(T - \lambda)^* = T^* - \overline{\lambda}$.

D'après 1- et (7) $(T-\lambda)^*$ est bien défini et on a

$$\langle (T-\lambda)x, v\rangle = \langle x, (T^*-\overline{\lambda})v\rangle, \forall x, v \in H. \tag{8}$$

Pour montrer

$$\sigma(T^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\},$$

il suffit de montrter $\lambda \notin \sigma(T) \Leftrightarrow \overline{\lambda} \notin \sigma(T^*)$.

Or $\lambda \in \rho(T)$ si et seulement si (ssi) $T-\lambda$ est inversible ssi (Exercice 2) $T^*-\overline{\lambda}$ est inversible ssi $\lambda \in \rho(T^*)$. Par suite

$$\sigma(T^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

3-On peut dire que

$$\sigma_p(T^*) \neq \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma_p(T)\}, (9)$$

Exemple 1 : il existe un opérateur S_1

$$S_1 : (\ell^2, \mathbb{C}) \to (\ell^2, \mathbb{C}) : (x_n) \mapsto (0, x_1, x_2, \cdots),$$

tel que d'après (7)

$$\begin{aligned}
\langle S_1 x, y\rangle &= \langle x, S_1^* y\rangle, \forall x, y \in \ell^2, \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_{i+1} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i S_1^* y_i, \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} x_i (y_{i+1} - S_1^* y_i) = 0, \forall x, y \in \ell^2 \\
&\Leftrightarrow (y_{i+1} - S_1^* y_i) = 0, \forall y_i \in i = \overline{1;\infty}.
\end{aligned}$$

Alors

$$S_1^* y = (y_2, y_3, \cdots).$$

Cherchons $\sigma_p(S_1)$ et $\sigma_p(S_1^*)$.

Comme S_1 est injectif ; $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre.
$\lambda \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}
&\lambda \in \sigma_p(S_1) \text{ ssi } \exists x \neq 0 : Sx = \lambda x, \\
\text{ssi} \quad &\big(0, x_1, x_3, \cdots\big) = \lambda(x_1, x_2, \cdots\big) \\
\text{ssi} \quad &\lambda x_1 = 0, \lambda x_{i+1} = x_i, \forall i \geq 1. \\
\text{ssi} \quad &x_i = 0, \forall i \geq 1.
\end{aligned}$$

Donc $\sigma_p(S_1) = \varnothing$, par contre

$$\begin{aligned}
&\lambda \in \sigma_p(S_1^*) \text{ ssi } \exists x \neq 0 : S_1^* x = \lambda x, \\
\text{ssi} \quad &\big(x_2, x_3, x_4, \cdots\big) = \lambda\big(x_1, x_2, \cdots\big) \\
\text{ssi} \quad &\lambda x_1 = x_2, \lambda x_i = x_{i+1}, \forall i \geq 1. \\
\text{ssi} \quad &x_i = \lambda^i x_1, \forall i \geq 1.
\end{aligned}$$

Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1$ il existe un vecteur $0 \neq v = (1, \lambda, \cdots, \lambda^n, \cdots) \in \ell^2$: $S^* v_\lambda = \lambda v_\lambda$. Donc λ est une valeur propre de S^*. Par consequent

$$\sigma_p(S_1^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\},$$

ce qui justifie notre réponse (9).

Exemple 2 : il existe un opérateur S_2

$$S_2 : (\ell^2, \mathbb{C}) \to (\ell^2, \mathbb{C}) : (x_n) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \cdots),$$

tel que d'après (7)

$$\begin{aligned}
\langle S_2 x, y\rangle &= \langle x, S_2^* y\rangle, \forall x, y \in \ell^2, \\
\text{ssi} &\quad \sum_{i=1}^{\infty} x_{i+1} y_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i S_2^* y_i, \\
\text{ssi} &\quad x_1 0 + \sum_{i=2}^{\infty} x_i y_{i-1} = x_1 y_1 \sum_{i=2}^{\infty} x_i S_2^* y_i, \\
\text{ssi} &\quad \sum_{i=2}^{\infty} x_i (y_{i-1} - S^* y_i) = 0, \text{ et } y_1 = 0 \\
\text{ssi} &\quad (y_{i-1} - S_2^* y_i) = 0, \forall y_i \in i = \overline{2;\infty} \,\text{et}\; y_1 = 0\ .
\end{aligned}$$

Alors

$$S_2^* y = (0, y_1, y_2 \cdots).$$

Cherchons $\sigma_p(S_2)$ et $\sigma_p(S_2^*)$.
Comme S_2^* est injectif ; $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre.
$\lambda \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}
&\lambda \in \sigma_p(S_2^*) \text{ ssi } \exists x \neq 0 : Sx = \lambda x, \\
\text{ssi} &\quad \big(0, x_1, x_3, `cdots\big) = \lambda\big(x_1, x_2, \cdots\big) \\
\text{ssi} &\quad \lambda x_1 = 0, \lambda x_{i+1} = x_i, \forall i \geq 1. \\
\text{ssi} &\quad x_i = 0, \forall i \geq 1.
\end{aligned}$$

Donc $\sigma_p(S_2^*) = \varnothing$. par contre

$$\begin{aligned}
&\lambda \in \sigma_p(S_2) \text{ ssi} \exists x \neq 0 : S_2 x = \lambda x, \\
\text{ssi} &\quad \big(x_2, x_3, x_4, cdots\big) = \lambda\big(x_1, x_2, \cdots\big) \\
\text{ssi} &\quad \lambda x_1 = x_2, \lambda x_i = x_{i+1}, \forall i \geq 1. \\
\text{ssi} &\quad x_i = \lambda^i x_1, \forall i \geq 1.
\end{aligned}$$

Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1$ il existe un vecteur $0 \neq v = (1, \lambda, \cdots, \lambda^n, \cdots) \in \ell^2$: $S^* v_\lambda = \lambda v_\lambda$. Donc λ est une valeur propre de S_2. Par consequent

$$\sigma_p(S_2) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\},$$

Cequi justifie notre réponse (9).