Corrigé-type + Barème

Réponse à l'exercice 01 : (Processus de Poisson : 04 pts)

1. La probabilité que ce serveur reçoit 4 requêtes dans une période de 1.2 secondes :
   Nous savons que la probabilité d'avoir n évènements dans une période de temps t est donné par :
   $P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$. $\lambda = 3.6$, $t = 1.2$ secondes et $n = 4$, nous aurons :
   $P_4(1.2) = \frac{(3.6\times 1.2)^4}{4!} e^{-3.6\times 1.2} = 14.51188224 \times 0.01329988$.
   Ainsi $\boxed{P_4(1.2) = 0.19300634}$ 01.00
2. La probabilité que ce serveur ne reçoit aucune requête pendant 1.3 secondes :
   De la même manière avec $\lambda = 3.6$ requêtes/seconde et $t = 2.3$ secondes et $n = 0$.
   $P_0(1.3) = \frac{(3.6\times 1.3)^0}{0!} e^{-3.6\times 1.3} = e^{-4.68}$
   $\boxed{P_0(1.3) = 0.00927901}$ 01.00
3. La probabilité que la requête suivante sera reçue avant 1.5 secondes :
   Nous savons que $P(t_2 - t_1 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
   Ainsi $P(t_2 - t_1 \leq 1.75) = 1 - e^{-3.6\times 1.5} = 1 - 0.00451658$.
   $\boxed{P(t_2 - t_1 \leq 1.75) = 0.99548341}$ 01.00
4. Le nombre moyen de requêtes reçues par ce servuer durant 2 heures et 17 minutes est :
   $Nb = \lambda \times t = 3.6 \times (2 \times 3600 + 17 \times 60)) = 3.6 \times 8220$. 01.00
   $\boxed{Nb = 29592 \text{ requêtes}}$

Réponse à l'exercice 02 : (File d'attente : 06 pts)

Le système est modélisé par une file d'attente de type $M/M/5$.

1. La probabilité de trouver ce système vide :
   $P_0 = \frac{\text{durée vide}}{\text{durée d'observation}} = \frac{4}{100} \Rightarrow \boxed{P_0 = 0.04}$ 01.00
2. La probabilité qu'une requête reçue doit attendre :
   $\zeta = \frac{\text{nombre de requêtes ayant attendu}}{\text{Nombre total de requêtes reçues}} = \frac{489}{1765} \Rightarrow \boxed{\zeta = 0.27705382}$ 01.00
3. Le nombre moyens de requêtes en attente dans ce système :
   $\varrho = \frac{\text{durée d'occupation}}{\text{durée d'observation}} = \frac{\text{durée d'observation - durée de repos}}{\text{durée d'observation}} = \frac{100-37}{100} \Rightarrow \boxed{\varrho = 0.63}$
   $\overline{Q} = \frac{\zeta\varrho}{1-\varrho} = \frac{0.27683615\times 0.63}{1-0.63} \Rightarrow \boxed{\overline{Q} = 0.47174029}$ 01.00
4. Le nombre moyens de requêtes dans ce système :
   $\overline{N} = \overline{Q} + \overline{R} = \overline{Q} + m\varrho = 0.47174029 + 5 \times 0.63 \Rightarrow \boxed{\overline{N} = 3.621740295}$ 01.00
5. Le temps moyen d'attente dans ce système :
   $\lambda = \frac{\text{Nombre de requêtes reçues}}{\text{durée d'observation}} = \frac{1765}{100} = 17.65$ requêtes/s.
   Utilisant la formule de Little : $\overline{W} = \frac{\overline{Q}}{\lambda} = \frac{0.47174029}{17.65} \Rightarrow \boxed{\overline{W} = 0,026727495}$ 01.00
6. Le temps moyen de résidence dans ce système :
   Utilisant la formule de Little : $\overline{T} = \frac{\overline{N}}{\lambda} = \frac{3.621740295}{17.65} \Rightarrow \boxed{\overline{T} = 0.20519775}$ 01.00

Réponse à l'exercice 03 : (Réseau de files d'attente : 10 pts)

Nous avons : $\gamma = 4, \mu_1 = 1, \mu_2 = 5, \mu_3 = 2, m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = +\infty$.

01.00 01.00

1. Matrice de routage interne : $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.4 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}}$, Matrice de routage externe : $\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0.6-\alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix}}$
2. Les taux d'arrivée effectifs λ_i : $\begin{cases} \lambda_1 = \alpha\lambda_3 \\ \lambda_2 = \gamma + \lambda_1 + 0.4\lambda_2 \\ \lambda_3 = \alpha\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \alpha\lambda_3 \\ 0.6\lambda_2 = 4 + \alpha\lambda_3 \\ \lambda_3 = \alpha\lambda_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \alpha\lambda_3 \\ 0.6\lambda_2 = 4 + \alpha^2\lambda_2 \\ \lambda_3 = \alpha\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \alpha\lambda_3 \\ (0.6-\alpha^2)\lambda_2 = 4 \\ \lambda_3 = \alpha\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \lambda_1 = \frac{4\alpha^2}{0.6-\alpha^2} \\ \lambda_2 = \frac{4}{0.6-\alpha^2} \\ \lambda_3 = \frac{4\alpha}{0.6-\alpha^2} \end{cases}}$$ 01.50

Remarquez que $\alpha = \sqrt{0.6} = 0.77459666$ ne peut pas être une solution.

3. Valeurs de α qui assurent la stabilité du réseau :

$$\begin{cases} FA_1 \text{ Stable} \\ FA_2 \text{ Stable} \\ FA_3 \text{ Stable} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varrho_1 = \frac{\lambda_1}{m_1\mu_1} = \frac{4\alpha^2}{0.6-\alpha^2} < 1 \\ \varrho_2 = \frac{\lambda_2}{m_2\mu_2} = \frac{2\alpha^2}{5(0.6-\alpha^2)} < 1 \\ \varrho_3 = 0 < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\alpha^2 < 0.6 \\ 7\alpha^2 < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha < 0.34641016 \\ \alpha < 0.65465367 \end{cases}$$

En conclusion, pour que le réseau soit stable, il faut que :
$\boxed{0 < \alpha < 0.34641016}$ ou $\boxed{\alpha \in]0, 0.34641016[}$ 01.00

Maintenant $\alpha = 0.3$: 01.00

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{4\alpha^2}{0.6-\alpha^2} = \frac{4\times 0.3^2}{0.6-0.3^2} \\ \lambda_2 = \frac{4}{0.6-\alpha^2} = \frac{4}{0.6-0.3^2} \\ \lambda_3 = \frac{4\alpha}{0.6-\alpha^2} = \frac{4\times 0.3}{0.6-0.3^2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \lambda_1 = 0.70588235 \\ \lambda_2 = 7.84313725 \\ \lambda_3 = 2.35294117 \end{cases}} \begin{cases} \varrho_1 = \frac{\lambda_1}{m_1\mu_1} = \frac{0.70588235}{1\times 1} \\ \varrho_2 = \frac{\lambda_2}{m_2\mu_2} = \frac{7.84313725}{2\times 5} \\ \varrho_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \varrho_1 = 0.70588235 \\ \varrho_2 = 0.78431372 \\ \varrho_3 = 0 \end{cases}}$$

File d'attente 1 : de type $M/M/1$. File d'attente 2 : de type $M/M/2$. File d'attente 3 : de type $M/M/+\infty$.

00.25

4. Le nombre moyen de clients en attente dans chaque file d'attente et dans le réseau :
   (a) $\overline{Q_1} = \overline{N_1} - \overline{R_1} = \frac{\varrho_1}{1-\varrho_1} - m_1\varrho_1 = \frac{0.70588235}{1-0.70588235} - 0.70588235 = 2.4 - 0.70588235 \Rightarrow \boxed{\overline{Q_1} = 1.69411764}$
   (b) $P_0(2) = \left[\frac{(m_2\rho_2)^{m_2}}{m_2!(1-\rho_2)} + \sum_{k=0}^{m_2-1}\frac{(m_2\rho_2)^k}{k!}\right]^{-1} = \left[\frac{(2\times 0.78431372)^2}{2!(1-0.78431372)} + 1 + 2\times 0.78431372\right]^{-1}$ 00.25
   $P_0(2) = [5.70409959 + 1 + 1.56862744]^{-1} \Rightarrow \boxed{P_0(2) = 0.12087912}$ 00.25
   $\zeta_2 = \frac{(m_2\rho_2)^{m_2}}{m_2!(1-\rho_2)}P_0(2) = \frac{(2\times 0.78431372)^2}{2!(1-0.78431372)}P_0(2) = 5.70409959\times 0.12087912 \Rightarrow \boxed{\zeta_2 = 0.68950653}$
   $\overline{Q_2} = \frac{\zeta_2\rho_2}{1-\rho_2} = \frac{0.68950653\times 0.78431372}{1-0.78431372} \Rightarrow \boxed{\overline{Q_2} = 2.50729662}$ 00.25
   (c) $\boxed{\overline{Q_3} = 0}$ 00.25
   (d) $\overline{Q_R} = \sum_{i=1}^{3}\overline{Q_i} = 1.69411764 + 2.50729662 + 0 \Rightarrow \boxed{\overline{Q_R} = 4.20141427}$ 00.25
5. Le nombre moyen de clients dans chaque file d'attente et dans le réseau :
   (a) $\overline{N_1} = \overline{N_1} = \frac{\varrho_1}{1-\varrho_1} = \frac{0.70588235}{1-0.70588235} \Rightarrow \boxed{\overline{N_1} = 2.4}$ 00.25
   (b) $\overline{N_2} = \overline{Q_2} + \overline{R_2} = 2.50729662 + 2\times 0.78431372 \Rightarrow \boxed{\overline{N_2} = 4.075924075}$ 00.25
   (c) $\overline{N_3} = \overline{R_3} = \frac{\lambda_3}{\mu_3} = \frac{2.35294117}{2} \Rightarrow \boxed{\overline{N_3} = 1.176470585}$ 00.25
   (d) $\overline{N_R} = \sum_{i=1}^{3}\overline{N_i} = 2.4 + 4.075924075 + 1.176470585 \Rightarrow \boxed{\overline{N_R} = 7.65239466}$ 00.25
6. Le temps moyen de résidence dans chaque file d'attente et dans le réseau :
   (a) $\overline{T_1} = \frac{\overline{N_1}}{\lambda_1} = \frac{2.4}{0.70588235} \Rightarrow \boxed{\overline{T_1} = 3.4}$ 00.25
   (b) $\overline{T_2} = \frac{\overline{N_2}}{\lambda_2} = \frac{4.075924075}{7.84313725} \Rightarrow \boxed{\overline{T_2} = 0.519680319}$ 00.25
   (c) $\overline{T_3} = \frac{\overline{N_3}}{\lambda_3} = \frac{1.176470585}{2.35294117} \Rightarrow \boxed{\overline{T_3} = 0.5}$ 00.25
   (d) $\overline{T_R} = \frac{\overline{N_R}}{\lambda_R} = \frac{\overline{N_R}}{\sum_{i=1}^{2}\gamma_i} = \frac{7.65239466}{4} \Rightarrow \boxed{\overline{T_R} = 1.91309866}$ 00.25
7. Le temps moyen d'attente dans chaque file d'attente et dans le réseau :
   (a) $\overline{W_1} = \frac{\overline{Q_1}}{\lambda_1} = \frac{1.69411764}{0.70588235} \Rightarrow \boxed{\overline{W_1} = 2.4}$ 00.25
   (b) $\overline{W_2} = \frac{\overline{Q_2}}{\lambda_2} = \frac{2.50729662}{7.84313725} \Rightarrow \boxed{\overline{W_2} = 0.319680319}$ 00.25
   (c) $\boxed{\overline{W_3} = 0}$ 00.25
   (d) $\overline{W_R} = \frac{\overline{Q_R}}{\lambda_R} = \frac{\overline{Q_R}}{\sum_{i=1}^{2}\gamma_i} = \frac{4.20141427}{4} \Rightarrow \boxed{\overline{W_R} = 1.050353568}$ 00.25
8. La probabilité pour que le réseau ne soit pas vide :
   $Pr(\text{Réseau non vide}) = 1 - Pr(\text{Réseau vide}) = 1 - (Pr(FA_1 \text{ vide et } FA_2 \text{ vide et} FA_2 \text{ vide}))$
   $= (1 - P_0(FA_1) \times P_0(FA_2) \times P_0(FA_3))$
   $Pr(\text{Réseau vide}) = 1 - (1-\rho_1) \times P_0(2) \times P_0(3) = 1 - 0.29411764 \times 0.12087912 \times e^{\frac{-\lambda_3}{\mu_3}}$
   $= 1 - 0.29411764 \times 0.12087912 \times 0.30836516 = 1 - 0.010963208$
   Ainsi $\boxed{Pr(\text{Réseau non vide}) = 0.98903679}$ 01.00