Corrigé-type Module modélisation numérique 2

Master 1 Physique Appliquée

Exercice 1 (8pts)

1) Voir Cours d'équation de la chaleur ………………….2pts

On pose K=1/Theta^2

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta_k}{\partial t}(t,x) &= -\frac{1}{4\sqrt{\pi k}}t^{-3/2}\exp(-\frac{x^2}{4kt}) + \frac{1}{2\sqrt{\pi k}}t^{-1/2}(\frac{x^2}{4kt^2})\exp(-\frac{x^2}{4kt})\\ &= \frac{1}{4\sqrt{\pi k}}t^{-3/2}\exp(-\frac{x^2}{4kt})(-1+\frac{x^2}{2kt}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta_k}{\partial x}(t,x) &- -\frac{1}{2\sqrt{\pi k}}t^{-1/2}\exp(-\frac{x^2}{4kt})(\frac{2x}{4kt}),\\ \frac{\partial^2\theta_k}{\partial x^2}(t,x) &= \frac{1}{4k\sqrt{\pi k}}t^{-3/2}(\quad \exp(\quad \frac{x^2}{4kt}) \mid x\exp(\quad \frac{x^2}{4kt})(\frac{2x}{4kt}))\\ & \quad 1\ \partial\theta_k\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{k}\frac{\partial\theta_k}{\partial t}(t,x).$$

2) La solution généralisée de l'équation ………………..

avec les relations de compatibilité entre la condition initiale et les conditions aux limites

$$u_0(0) = u_0(L) = 0.$$

1$^{\text{ère}}$ étape : La méthode de séparation des variables consiste à poser

$$u(t,x) = \psi(t)\varphi(x),$$

dans l'équation et de "séparer les variables". L'équation devient

$$\psi'(t)\varphi(x) = k\psi(t)\varphi''(x).$$

On divise alors formellement par $u(t,x) = \psi(t)\varphi(x)$

$$\frac{1}{k}\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}.$$

Comme le membre de gauche ne dépend que de t et le membre de droite que de x on en déduit qu'ils sont constants, c'est à dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ avec

....2PTS

$$\psi'(t) = \lambda k \psi(t),$$

$$\varphi''(x) = \lambda \varphi(x).$$

On a bien obtenu deux équations à variables séparées.

$2^{\text{ème}}$ étape : On cherche les solutions non nulles de l'équation en $\varphi(x)$ **avec** les conditions aux limites, soit

$$\begin{cases} \varphi''(x) = \lambda \varphi(x), \\ \varphi(0) = \varphi(L) = 0. \end{cases}$$

Les solutions dépendent de la constante λ

– Si $\lambda > 0$ alors les solutions de l'équation différentielle sont

$$\varphi(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x},$$

....1PTS

C'est exactement la même équation et les mêmes conditions aux limites que pour l'équation de la chaleur unidimensionnelle. On a donc les mêmes solutions

$$\varphi_n(x) = \sin(\frac{n\pi}{L}x), \quad \text{n} > 0 \ ,$$

associées aux valeurs de λ suivantes

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}.$$

....1PTS

$4^{\text{ème}}$ étape : On résout l'équation en $\psi(t)$ pour les valeurs de λ_n trouvées précédemment et sans se préoccuper de la condition initiale. On a à résoudre l'équation

$$\psi_n''(t) = \lambda_n c^2 \psi_n(t),$$

....1PTS

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(t)\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n \sin(\frac{n\pi}{L}ct) + d_n \cos(\frac{n\pi}{L}ct)) \sin(\frac{n\pi}{L}x).$$

....1PTS

Exercice 2 (6pts)

Méthode de Trapèse 3pts

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)]$$

n=2 i=34.089

n=4 i= 31.11=

Méthode de Simpson «3pts

D'après la méthode de Simpson : $\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[f(a) + f(b) + 4f(x_i)]$

N=2 i=30.55

N=4 i= 30.04

On peut remarquer que les deux méthodes donnent des résultats très convergents

Exercice 3 (6pts)

$y'' - 3y' + 2y = 1, \; y(0) = 0, \; y'(0) = 3.$

$$\mathcal{L}[y'' - 3y' + 2y] = \mathcal{L}[\mathcal{U}(t)] \Leftrightarrow \mathcal{L}[y''] - 3\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] = \frac{1}{p}.$$

En utilisant (15) et (16), il vient

$$p^2\mathcal{L}[y] - py(0) - y'(0) - 3[p\mathcal{L}[y] - y(0)] + 2\mathcal{L}[y] = \frac{1}{p}.$$

En remplaçant les valeurs initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$, on aboutit à une équation du premier degré d'inconnue $\mathcal{L}[y]$:

$$(p^2 - 3p + 2)\mathcal{L}[y] = \frac{1}{p} + 3 = \frac{3p+1}{p} \Leftrightarrow \mathcal{L}[y] = \frac{3p+1}{p(p^2 - 3p + 2)}.$$

La solution du problème est donc l'original de

$$F(p) = \frac{3p+1}{p(p^2 - 3p + 2)} = \frac{3p+1}{p(p-1)(p-2)}.$$

Cette fraction rationnelle figure dans notre mini-table, dernière ligne, avec $A = 3$, $B = 1$, $a = 0$, $b = -1$, $c = -2$. La solution du problème de Cauchy est donc

$$y = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}[y]) = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}e^{2t} - 4e^{t}.$$

……6PTS