# Corrige -type : Équations aux dérivées Partielles

**Exercice 01**

**1.**

- **Les courbes caractéristiques**

$X_1 = x + \sqrt{2}\,t. \quad X_2 = x - \sqrt{2}\,t.$

- **La forme standard**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} = 0.$$

- **La solution générale**

$$u(x,t) := F(X_1) + G(X_2) = F\left(x + \sqrt{2}\,t\right) + G\left(x - \sqrt{2}\,t\right).$$

**2.**

- **La solution générale**

$$u(x,t) := \frac{1}{2}\left[f\left(x + \sqrt{2}\,t\right) + f\left(x - \sqrt{2}\,t\right)\right] + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{x-\sqrt{2}\,t}^{x+\sqrt{2}\,t} g(s)ds.$$

**3.**

- 

$$u\left(-1,\sqrt{2}\right) := \frac{1}{2}[f(1) + f(-3)] + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-3}^{1} g(x)dx = \frac{1}{2}\left[2\sqrt{2} + 0\right] + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-3}^{0} g\mathrm{dx} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{0}^{1} g(x)dx$$
$$= \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-3}^{0} \mathrm{dx} + + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{0}^{1} 2xdx = \sqrt{2} + \frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

- 

$$u\left(\sqrt{2},2\right) := \frac{1}{2}\left[f\left(3\sqrt{2}\right) + f\left(-\sqrt{2}\right)\right] + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}} g(x)dx = \frac{1}{2}[12 - 0] + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}} g\mathrm{dx}$$
$$= 6 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2}}^{0} \mathrm{dx} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{0}^{1} 2x\mathrm{dx} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{1}^{3\sqrt{2}} x\mathrm{dx} = 6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{17}{4\sqrt{2}}$$
$$= \frac{13}{2} + \frac{19}{4\sqrt{2}}.$$

**3.**

$$\lim_{t\to\infty} u(1,t) = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left[f\left(1 + \sqrt{2}\,t\right) + f\left(1 - \sqrt{2}\,t\right)\right] + \frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{t\to\infty}\int_{1-\sqrt{2}\,t}^{1+\sqrt{2}\,t} g(x)\mathrm{dx}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\underbrace{f(\infty)}_{\infty} + \underbrace{f(-\infty)}_{0}\right] + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\underbrace{\int_{-\infty}^{0} g(x)dx}_{+\infty} + + \frac{1}{2\sqrt{2}}\underbrace{\int_{0}^{1} g(x)dx}_{\frac{1}{2\sqrt{2}}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\underbrace{\int_{1}^{\infty} g(x)dx}_{+\infty}$$
$$= +\infty$$

**Exercice 02**

1. On pose $u(x,t) = X(x)T(t)$, on trouve

$$\frac{T''(t)}{2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

D'autre part, on a

$u(0,t) = 0 \Longrightarrow X(0)T(t) = 0 \Longrightarrow X(0) = 0.$

$u(1,t) = 0 \Longrightarrow X(1)T(t) = 0 \Longrightarrow X(1) = 0.$

Par conséquent,

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad x \in ]0,\pi[, \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases} \qquad \{T'(t) + 2\lambda T(t) = 0$$

2. Résoudre

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases}$$

On a

Si $\lambda = 0$: $y(x) = a + bx$. $X(0) = X(1) = 0 \Longrightarrow a = b = 0$. Donc, $X \equiv 0$.

Si $\lambda < 0$: $y(x) = a e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + b e^{-\sqrt{-\lambda}\,x}$.

$X(0) = X(1) = 0 \Longrightarrow b = -a$ et $a = 0$. Donc, $X \equiv 0$.

Si $\lambda > 0$: $y(x) = a\cos\sqrt{\lambda}\,x + b\sin\sqrt{\lambda}\,x$.

$X(0) = 0 \Longrightarrow a = 0.$

$X(\pi) = -\underbrace{b}_{\neq 0}\sin\sqrt{\lambda} = 0 \Longrightarrow \sin\sqrt{\lambda} = 0 \Longrightarrow \sqrt{\lambda} = n\pi, \; n \geq 1.$

Donc, $X_n(x) = \sin(n\pi x)$, $\sqrt{\lambda_n} = n\pi$, $n \geq 1$.

3. Résoudre

$\{T'(t) + 2\lambda T(t) = 0$ pour $\lambda \coloneqq \lambda_n = (n\pi)^2, \; n \geq 1.$

L'équation en $T(t)$ est une EDO linéaire du $1^{er}$ ordre à coefficients constants, alors les solutions sont donc de la forme

$$T(t) = Be^{-2\lambda t} \Longrightarrow T_n(t) = B_n e^{-2\boldsymbol{\lambda_n} t} = B_n e^{-2(n\pi)^2 t}, \quad \mathbf{n \geq 1}.$$

**4.** On déduit que la solution générale de **l'équation de la chaleur** sous la forme

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \sin(n\pi x)B_n e^{-2(n\pi)^2 t}, \quad \mathbf{n \geq 1}.$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x)B_n e^{-2(n\pi)^2 t}.$$

Pour $t = 0$, on a

$$u(x,0) = \sum_{n\geq 1} \sin(n\pi x)B_n = \sqrt{2}\sin(\pi x - \pi) + \cos\left(3\pi x + \frac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt{2}\sin(\pi x) + \sin(3\pi x).$$

Par comparaison, on trouve

$B_1 = -\sqrt{2}$.  $B_3 = 1$.   $B_n = 0$,   $n \in \mathbb{N}^* - \{1,3\}$.

**A**lors, la solution du problème est

$$u(x,t) = -\sqrt{2}\sin(\pi x)\, e^{-2\pi^2 t} + \sin(3\pi x) e^{-2(3\pi)^2 t}.$$

**Exercice 03**

1.

En multipliant (P) par $u$ et intégrant sur $(0,\pi)$, on trouve

$$\int_0^\pi u_t\, u dx - \int_0^\pi u_{xx}\, u dx + \int_0^\pi f\, u dx = 0. \qquad (1)$$

En intégrant par partie, on obtient

$$\int_0^\pi w_t\, w dx = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_0^L w^2\, dx\right].$$

$$\int_0^\pi u_{xx}\, u dx = u_x u \,|_0^\pi - \int_0^\pi u_x^2\, dx = u_x(\pi,t)\, \underbrace{u(\pi,t)}_{0} - u_x(0,t)\, \underbrace{u(0,t)}_{0} - \int_0^\pi u_x^2\, dx.$$

Donc (1), devient

$$\frac{d}{dt}\left[\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^\pi u^2\, dx}_{E(t)}\right] + \int_0^\pi u_x^2\, dx + \int_0^\pi f\, u dx = 0 \Longrightarrow E'(t) = -\int_0^\pi u_x^2\, dx - \int_0^\pi f\, u dx.$$

Comme

$$f(u)u \geq 0 \Longrightarrow \int_0^\pi f\, u(u) dx \geq 0 \Longrightarrow -\int_0^\pi f\, u dx \leq 0.$$

D’où $E'(t) \leq 0$.

D’autre part, par Intégration

$$E(t) \leq E(0) = \int_0^\pi u^2(x,0)\, dx = \int_0^\pi \varphi^2(x) dx.$$

2.

Soit $u_1$ et $u_2$ deux solutions au problème (P). Par le principe de superposition, la fonction $w := u_1 - u_2$ est une solution du problème

$$(\mathrm{P}_1)\ \begin{cases} w_t - w_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ w_x(0,t) = w_x(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ w(x,0) = 0, & 0 < x < L, \end{cases}$$

D’âpre la question 1, on a

$E(t) := \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^L w^2\, dx \geq 0$ et $E(0) = 0$ il s’ensuit que $E \equiv 0$.

Par conséquent, $w(x,t) = u_1 - u_2 \equiv 0$, $\forall t \geq 0$ et l’unicité est prouvée.