2ème année Maths (S4).

Corrigé type Contrôle en Probabilité 2023

Exercice 1. *L'expérience aléatoire est " choisir une personne au hasard de la population" et soient les évènements :* H *:"la personne choisie est un homme",* F *:"la personne choisie est une femme" ,* L *: " la personne choisie porte des lunettes*

On a $H \cup F = \Omega$ *et* $H \cap F = \phi$ *donc* H *et* F *est un système complet d'évènements pour* Ω *et on a :*

$* \ P(H) = 0,3 \quad *P(F) = 0,7 \ * \ P(L/H) = \frac{1}{4} * P(L/F) = \frac{1}{6}.$

1) On cherche $P\left(\overline{L}\right)$ *on a d'après la formule des probabilités totales*

$$\begin{aligned} P\left(\overline{L}\right) &= P(H) P\left(\overline{L}/H\right) + P(F) P\left(\overline{L}/F\right) \\ &= 0,3 \times \frac{3}{4} + 0,7 \times \frac{5}{6} = 0,8 \end{aligned}$$

2) On cherche $P(F/L)$ *on a*

$$P(F/L) = \frac{P(F) P(L/F)}{P(L)} = \frac{0,7 \times \frac{1}{6}}{1 - 0,8} = 0,58$$

3) On cherche $P(H/L)$ *on a* $\overline{H} = F$ *Donc*

$$P(H/L) = 1 - P(F/L) = 1 - 0,58 = 0.42$$

Exercice 2. *Soit* X *une variable aléatoire de densité* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = \begin{cases} \alpha & , \textit{ pour } 0 \leq x < 1 \\ \frac{\alpha}{5} & , \textit{ pour } 1 \leq x < 2 \\ 0 & , \textit{ ailleurs} \end{cases}$$

1.Calculer la constante α *?*

Comme f est une densité alors on a : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0$ $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ *alors on trouve que* $\alpha + \frac{\alpha}{5} = 1$ *donc* $\alpha = \frac{5}{6}$

2. Calculer $E(X)$, $V(X)$ *et la fonction de répartition* $F(x)$ *correspondante ?*

* $E(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \frac{5}{6}\int\limits_{0}^{1} xdx + \frac{1}{6}\int\limits_{1}^{2} xdx = \frac{2}{3}$

* $E(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{5}{6}\int\limits_{0}^{1} x^2dx + \frac{1}{6}\int\limits_{1}^{2} x^2dx = \frac{2}{3}$

* $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{9}$

* $\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0 & , \ \textit{pour } x \leq 0 \\ \frac{5}{6}x & , \ \textit{pour } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{5}{6} + \frac{1}{6}(x-1) & , \textit{pour } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & , \ x \geq 2 \end{cases}$

3. Calculer les probabilités $\mathbb{P}\left(X \leq \frac{1}{2}\right), \mathbb{P}\left(X > \frac{1}{2}\right), \mathbb{P}\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{1}{2}\right)$.

* $\mathbb{P}\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{12}$ * $\mathbb{P}\left(X > \frac{1}{2}\right) = 1 - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{12}$ * $\mathbb{P}\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{36}$

Exercice 3. *Soit X une variable aléatoire réelle définie sur l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Déterminer la loi de X , $E(X)$ et $V(X)$ dans les cas suivants :*

On doit avoir dans les trois premiers cas $\sum\limits_{k \in X(\Omega)} P(X = k) = 1$

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ *et qu'il existe* $\alpha \in \left]0,1\right[$ *tel que :* $\forall n \in \mathbb{N}^* : P[X = n] - \alpha P[X = n-1] = 0.$

$*P[X = n] = \alpha P[X = n-1] = \alpha^2 P[X = n-2] = \alpha^3 P[X = n-3] = ... = \alpha^{n-1} P[X = 1]$

$1 = \sum\limits_{n \in X(\Omega)} P(X = n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(X = n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} P[X = 1] = P[X = 1] \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} = P[X = 1] \frac{1}{1-\alpha}$

Donc $P[X = 1] = 1 - \alpha$ *Donc* $\forall n \in \mathbb{N}^* : P[X = n] = \alpha^{n-1}(1-\alpha)$ *C'est à dire* $X \backsim$ *géometrique* $(1-\alpha)$

$E(X) =$

2. $X(\Omega) = \{0, 1, ..., n\}$ *et qu'il existe* $\delta \in \mathbb{R}$ *tel que :* $\forall k \in X(\Omega)$:

$P[X = k] = \delta \frac{n!}{k!(n-k)!} = \delta C_n^k$

$\sum\limits_{k\in X(\Omega)} P\left(X=k\right) = \sum\limits_{k=0}^{n} \delta C_n^k = \delta \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = \delta 2^n = 1$ *Donc* $\delta = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Donc $P\left[X=k\right] = \delta C_n^k = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n$ *C'est à dire* $X \backsim B\left(n, \frac{1}{2}\right)$, $E\left(X\right) = \frac{n}{2}$, $V\left(X\right) = \frac{n}{4}$

3. $X\left(\Omega\right) = \mathbb{N}$ *et qu'il existe* $\delta \in \mathbb{R}$ *tel que*$\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$nP\left[X=n\right] - \delta P\left[X=n-1\right] = 0.$

$P\left[X=n\right] = \frac{\delta}{n} P\left[X=n-1\right] = \frac{\delta}{n}\frac{\delta}{n-1} P\left[X=n-2\right] = ... = \frac{\delta^n}{n!} P\left[X=0\right]$

$1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P\left(X=n\right) = P\left[X=0\right] \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^n}{n!} = P\left[X=0\right] e^{\delta}$ *Donc* $P\left[X=0\right] = e^{-\delta}$

Donc $P\left[X=n\right] = \frac{\delta^n}{n!} e^{-\delta}$ *C'est à dire* $X \backsim Poisson\left(\delta\right)$, $E\left(X\right) = \delta$, $V\left(X\right) = \delta$

4.X *une variable aléatoire de densité* f *donnée par*

$$f\left(x\right) = \begin{cases} \beta, si\ x \in [-3, 3] \\ 0, \ \ si\ x \notin [-3, 3] \end{cases}$$

Dans ce cas $\forall x \in \mathbb{R} : f\left(x\right) \geq 0$ $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right) dx = 1$ donc on trouve $\beta = \frac{1}{6}$ C'est à dire $X \backsim Uniforme\left([-3, 3]\right)$, $E\left(X\right) = 0$, $V\left(X\right) = 18$