Corrigé type de l'examen du module Transformations intégrales dans les espaces Lp

---

Exercice 1 (2,5+1,5+4 = 8 points).

1) On a $f(t) = e^{-2t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty[\, \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, donc $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, et on a $e^{-2t} \in C(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R})$, donc $f(t) \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. De plus, $f(t) = e^{-2t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) = 0\ \forall t \in]-\infty, 0[$, donc $f(t) \in \mathcal{C}$. $\boxed{0{,}5}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\int_0^\infty |f(t)e^{-xt}|dt = \int_0^\infty e^{-(x+2)t}dt = \begin{cases} \int_0^\infty dt & si\ \ x = -2 \\ \left[-\frac{e^{-(x+2)t}}{x+2}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} & si\ x \neq -2 \end{cases} = \begin{cases} +\infty & si\ \ x \leq -2 \\ \frac{1}{x+2} & si\ x > -2. \end{cases}$ D'où $x_f = \inf\{x \in \mathbb{R}; f(t)e^{-xt} \in L^1(\mathbb{R}_+^*)\} = \inf]-2,\infty[= -2 < \infty$, donc $f(t) \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ et $D_{\mathcal{L}f} = \{s \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}\, s > -2\}$. $\boxed{1}$

Pour tout $s \in D_{\mathcal{L}f}$, on a $\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_{\mathbb{R}_+^*} f(t)e^{-st}dt = \int_a^\infty e^{-(s+2)t}dt = -\frac{1}{s+2}\left[e^{-(s+2)t}\right]_{t=a}^{t\to+\infty} = -\frac{1}{s+2}\left(\lim_{t\to+\infty} e^{-(s+2)t} - 1\right) = \frac{1}{s+2}$, vu qu'on a $\left|e^{-(x+iy+2)t}\right| = \left|e^{-(x+2)t}e^{-iyt}\right| = e^{-(x+2)t}\left|e^{-iyt}\right| = e^{-(x+2)t}$ et $\lim_{t\to+\infty} e^{-(x+2)t} = 0$ si $x > -2$. D'où : $\boxed{\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{s+2},\ \ \mathrm{Re}\, s > -2}$. $\boxed{1}$

2) Par la propriété de linéarité, on a : $\mathcal{L}\left[2tf(t) - \int_0^t f(\tau)f(t-\tau)d\tau\right](s) = 2\mathcal{L}[tf(t)](s) - \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)f(t-\tau)d\tau\right](s)$. $\boxed{0{,}25}$

Par la propriété d'holomorphie, on a : $\mathcal{L}[tf(t)](s) = -\frac{d\mathcal{L}[f(t)]}{ds}(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$. $\boxed{0{,}5}$

Par la propriété de convolution, on a: $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)f(t-\tau)d\tau\right](s) = \left(\mathcal{L}[f(t)](s)\right)^2 = \frac{1}{(s+2)^2}$. $\boxed{0{,}5}$

D'où : $\boxed{\mathcal{L}\left[2tf(t) - \int_0^t f(\tau)f(t-\tau)d\tau\right](s) = \frac{2}{(s+2)^2} - \frac{1}{(s+2)^2} = \frac{1}{(s+2)^2}}$. $\boxed{0{,}25}$

3) $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = f(t) \Rightarrow \mathcal{L}[y''(t) + 2y'(t) + y(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s) \Rightarrow$
$\mathcal{L}[y''(t)](s) + 2\mathcal{L}[y'(t)](s) + \mathcal{L}[y(t)](s) = \frac{1}{s+2} \Rightarrow s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2\left(sY(s) - y(0)\right) + Y(s) = \frac{1}{s+2} \Rightarrow (s^2 + 2s + 1)Y(s) = \frac{1}{s+2} + 2s + 5 \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{(s+2)(s^2+2s+1)} + \frac{2s+5}{s^2+2s+1} = \frac{2s^2+9s+11}{(s+2)(s+1)^2}$ $\boxed{1{,}5}$

On a $\frac{2s^2+9s+11}{(s+2)(s+1)^2} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} \Rightarrow A(s+1)^2 + B(s+1)(s+2) + C(s+2) = 2s^2 + 9s + 11 \Rightarrow$
$\begin{cases} A + B = 2 \\ 2A + 3B + C = 9 \\ A + 2B + 2C = 11 \end{cases} \Rightarrow A = 1, B = 1$ et $C = 4 \Rightarrow \frac{2s^2+9s+11}{(s+2)(s+1)^2} = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1} + \frac{4}{(s+1)^2}$ $\boxed{0{,}75}$

$\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1} + \frac{4}{(s+1)^2}\right) = \mathcal{U}(t)e^{-2t} + \mathcal{U}(t)e^{-t} + 4\mathcal{U}(t)te^{-t}$, $\boxed{1{,}5}$

i.e. $\boxed{y(t) = e^{-2t} + e^{-t} + 4te^{-t},\ \ \forall t \geq 0}$ $\boxed{0{,}25}$

Exercice 2 (2,5+2,5+2,5+1+2+1,5 = 12 points).

1) Soit $(m,p) \in \mathbb{N} \times [1,\infty]$. <u>Mesurabilité</u> : On a $[-m,m] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, donc $\mathbb{1}_{[-m,m]} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. $\boxed{0{,}25}$

<u>Cas $p = \infty$</u> : On a $\left|\mathbb{1}_{[-m,m]}(x)\right| = \mathbb{1}_{[-m,m]}(x) \leq 1 < \infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $\mathbb{1}_{[-m,m]} \in L^\infty(\mathbb{R})$. $\boxed{0{,}75}$

<u>Cas $p \neq \infty$</u> : On a $\int_{\mathbb{R}}\left|\mathbb{1}_{[-m,m]}\right|^p dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-m,m]}dx = \lambda_1\left(\mathbb{1}_{[-m,m]}\right) = 2m < \infty$, donc $\mathbb{1}_{[-m,m]} \in L^p(\mathbb{R})$. $\boxed{1{,}5}$

2) Soit $m \in \mathbb{N}$. On a $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $|g_m| = \mathbb{1}_{[-m,m]}|f| \leq |f|$, donc $g_m \in L^2(\mathbb{R})$. $\boxed{1{,}25}$

On a $g_m = \mathbb{1}_{[-m,m]}f$ et $\left(\mathbb{1}_{[-m,m]}, f\right) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, donc, par l'inégalité de Hölder, $g_m \in L^1(\mathbb{R})$. $\boxed{1{,}25}$

3) Soit $m \in \mathbb{N}$.
On a $g_m \in L^2(\mathbb{R})$, donc $\mathcal{F}g_m \in L^2(\mathbb{R})$. $\boxed{1}$
On a $g_m \in L^1(\mathbb{R})$, donc, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}g_m(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g_m(x)e^{-2\pi i x\xi}dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-m,m]}(x)f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx = \int_{[-m,m]} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx = h_m(\xi)$, i.e. $h_m = \mathcal{F}g_m \in L^2(\mathbb{R})$. $\boxed{1{,}5}$

4) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|x| \leq m_0$, donc $g_m(x) = \mathbb{1}_{[-m,m]}(x)f(x) = f(x), \forall m \geq m_0$.
S'ensuit que $\lim_{m\to\infty} g_m(x) = f(x)$. $\boxed{1}$

5) On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{m\to\infty} g_m(x) = f(x)$. $\boxed{0{,}5}$
On a : $\forall (m,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}, |g_m(x)| = \mathbb{1}_{[-m,m]}(x)|f(x)| \leq |f(x)|$. $\boxed{0{,}5}$
Les hypothèses du théorème de la convergence dominée dans L^2 sont satisfaites (voir le théorème 1.28), alors $g_m \xrightarrow{L^2(\mathbb{R})} f$. $\boxed{1}$

6) On a : $g_m \xrightarrow{L^2(\mathbb{R})} f$, donc $\mathcal{F}g_m \xrightarrow{L^2(\mathbb{R})} \mathcal{F}f$, i.e. $h_m \xrightarrow{L^2(\mathbb{R})} \mathcal{F}f$. $\boxed{1{,}5}$