التصحيح النموذجي لامتحان
التحليل -2-

التمرين الأول:

الجزء الأول:

أ/

$\ln(1+\tan x) = x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

(1) $= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$

$g(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$

(1) $g(x) = 1 + 2x + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$.

ب/ معادلة المماس لـ (C_g) عند النقطة $A(0;1)$

(0.5) $(T): y = 1 + 2x$

* الوضع النسبي لـ (C_g) و (T)

(0.5) $g(x) - y = \frac{5}{6}x^3$

- لما $x \geq 0$: (C_g) فوق (T)
(0.5) - لما $x \leq 0$ (C_g) تحت (T)

(0.5) النقطة ذات الفاصلة 0 نقطة انعطاف لـ (C_g)

الجزء الثاني:

أ/ $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$

(1) $\sin \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$

(1) $x^2 \sin \frac{1}{x} = x - \frac{1}{6x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.

ب/

(0.5) $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - x) = 0$

(0.5) إذن المستقيم ذو المعادلة $y = x$ م.م مائل مجاور لـ (C_f)

الوضع النسبي:

(0.5) في جوار $-\infty$: $-\frac{1}{6x} > 0$ إذن (C_f) فوق (Δ)

(0.5) " " $+\infty$ $-\frac{1}{6x} < 0$ " (C_f) تحت (Δ)

الجزء الثالث:

نطبق صيغة لاغرانج على التابع f المعرف ب: $f(x)=\cos x$ بجوار 0

من أجل $n=5$ و $n=6$

$n=5$:

0,5 $$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5}{5!}\sin(c)$$

0,5 $$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7\sin k}{7!}$$

حيث $x\in[0,\pi]$ و k و c عددان محصوران بين 0 و x.

بما أن: $\frac{x^7\sin k}{7!}\geq 0$ من أجل $x\in[0,\pi]$ و k محصور بين 0 و x

0,5

$-\frac{x^5\sin c}{5!}\leq 0$ من أجل $x\in[0,\pi]$ و c محصور بين 0 و x

0,5 إذن $$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{720}\leq \cos x\leq 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$$

التمرين الثاني:

$$I_1=\int x^2\arctan x\,dx$$

التكامل بالتجزئة:

$u=\arctan x \Rightarrow u'=\frac{1}{1+x^2}$

0,5 $v'=x^2 \Rightarrow v=\frac{1}{3}x^3$.

$$I_1=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x^2}dx$$

0,5 $$I_1=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3+x-x}{1+x^2}dx$$ (يمكن اعمال القسمة العادية)

0,5 $$I_1=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{3}\int\left(x-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

0,5 $$I_1=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+c.$$

$$I_2 = \int \frac{1-2\cos x}{1+\cos^2 x} \sin x \, dx$$

0,5 $dt = -\sin x \, dx$: ومنه $t = \cos x$ نضع

0,5 $$I_2 = -\int \frac{1-2t}{1+t^2} dt = -\arctan t + \ln(1+t^2) + c$$

1 $$I_2 = -\arctan(\cos x) + \ln(1+\cos^2 x) + c.$$

0,25 $$I_3 = \int \frac{x}{x^2-3x+2} dx = \int \frac{x}{(x-1)(x-2)} dx$$

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$$

1 $$a = -1 \quad ; b = 2$$

0,25 $$I_3 = \int \frac{x}{x^2-3x+2} dx = \int \frac{-1}{x-1} dx + 2\int \frac{1}{x-2} dx$$

0,5 $$= -\ln|x-1| + 2\ln|x-2| + c.$$

التمرين الثالث:

1/ حل المعادلة التفاضلية: $(x^2-3x+2)y' + xy = -1$ ... (1)

هي معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الأولى.

أ/ حل المعادلة (1) دون طرف ثاني:

0,5 $$(x^2-3x+2)y' + xy = 0 \quad \ldots (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow y' = \frac{-x}{x^2-3x+2} y \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{-x}{x^2-3x+2} dx$$

0,25 $$\Leftrightarrow \ln|y| = \ln|x-1| - 2\ln|x-2| + c$$

0,25 $$\Leftrightarrow \ln|y_H| = \ln\left[\frac{x-1}{(x-2)^2}\right] + c$$

0,25 $$\Leftrightarrow y_H = k \cdot \frac{x-1}{(x-2)^2}$$

ب/ نقوم بتحريك الثابت فيكون:

$$y_p = k(x)\,\frac{x-1}{(x-2)^2}$$

نعوض في ① : y_p و y_p' :

$$y_p' = k'(x).\,\frac{x-1}{(x-2)^2} + k(x)\left(\frac{x-1}{(x-2)^2}\right)'$$

0,25 $$y_p' = k'(x).\,\frac{x-1}{(x-2)^2} + k(x)\left[\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2(x-1)}{(x-2)^3}\right].$$

$$(x^2-3x+1)\left[k'(x)\,\frac{x-1}{(x-2)^2} + k(x)\left[\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2(x-1)}{(x-2)^3}\right]\right] + x.\frac{k(x)(x-1)}{(x-2)^2} = -1$$

بعد التبسيط :

0,5 $$\frac{(x-1)^2}{x-2}k'(x) = -1$$

0,25 $$k'(x) = \frac{2-x}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}$$

0,25 $$k(x) = -\frac{1}{x-1} - \ln(x-1)$$

$$y_p = \frac{-1}{(x-2)^2} - \frac{x-1}{(x-2)^2}\ln(x-1).$$

$$y_p = -\frac{+1 + (x-1)\ln(x-1)}{(x-2)^2}$$

$$y = \frac{k(x-1)}{(x-2)^2} - \frac{1+(x-1)\ln(x-1)}{(x-2)^2}$$

0,25 $$y = \frac{k(x-1) - 1 - (x-1)\ln(x-1)}{(x-2)^2}$$

حل معادلات برنولي: (الاستنتاج):

$$(x^2-3x+2)y' - xy = y^2 \quad ...(3)$$

0,25 نضع: $z = y^{-1}$ فيكون $z' = -y^{-2}y'$

نقسم طرفي المعادلة (3) على y^2:

$$(x^2-3x+2)y'.y^{-2} - xy^{-1} = 1$$

$$-(x^2-3x+2)z' - xz = 1$$

0,25 اذن:

$$(x^2-3x+2)z' + xz = -1$$

وهي المعادلة التفاضلية (1) وحلها:

0,25

$$z = \frac{k(x-1) - 1 - (x-1)\ln(x-1)}{(x-2)^2}$$

0,25

$$y = \frac{1}{z} = \frac{(x-2)^2}{k(x-1) - 1 - (x-1)\ln(x-1)}$$