Exercice 1: Corrigé-type

① La population étudiée est : 250 personnes. (0,5×3)

* Les variables étudiées sont l'âge et le temps de sommeil.

② On commence par le tableau statistique: (1,5)

Y \ X	2	7	15	25	45	$\sum n_{ij} x_i y_j$	$n_{.j}$	$n_{.j} y_j$	$n_{.j} y_j^2$
6	$\boxed{0}$ 0	$\boxed{0}$ 0	$\boxed{2}$ 180	$\boxed{9}$ 1350	$\boxed{29}$ 7830	9360	40	240	1440
8	$\boxed{0}$ 0	$\boxed{3}$ 168	$\boxed{8}$ 960	$\boxed{26}$ 5200	$\boxed{15}$ 5400	11728	52	416	3328
10	$\boxed{2}$ 40	$\boxed{12}$ 840	$\boxed{35}$ 5250	$\boxed{22}$ 5500	$\boxed{6}$ 2700	14330	77	770	7700
13	$\boxed{36}$ 936	$\boxed{26}$ 2366	$\boxed{16}$ 3120	$\boxed{3}$ 975	$\boxed{0}$ 0	7397	81	1053	13689
$\sum n_{ij} x_i y_j$	976	3374	9510	13025	15930	$\boxed{42815}$			
$n_{i.}$	38	41	61	60	50		250	2479	26157
$n_{i.} x_i$	76	287	915	1500	2250		5028		
$n_{i.} x_i^2$	152	2009	13725	37500	101250		154636		

② $\overline{X} = \frac{1}{250}\sum_{i=1}^{i=5} n_{i.} x_i \simeq 20,1$; $\overline{Y} = \frac{1}{250}\sum_{j=1}^{j=4} n_{.j} y_j \simeq 9,916$. (0,5×4)

$Var(X) = \left[\frac{1}{N}\sum n_{i.} x_i^2\right] - \overline{X}^2 \simeq 214,051.$; $Var(Y) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{j=4} n_{.j} y_j^2 - \overline{Y}^2 \simeq 6,3$.

$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} \simeq 14,63$ $\sigma(Y) = \sqrt{Var(X)} \simeq 2,51$.

③ $Cov(X,Y) = \left[\frac{1}{N}\sum_i \sum_j n_{ij} x_i y_j\right] - \overline{X}\,\overline{Y} = \frac{42815}{25} - (20,1)\times(9,916) \simeq -28,71$.

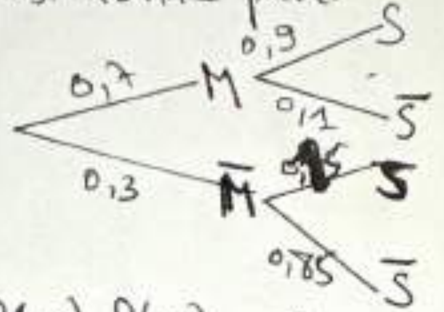
* $\rho = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{-28,17}{(14,63)(2,51)} \simeq -0,77$. (0,5×2)

⑤ Droite d'ajustement $\begin{cases} a = \frac{cov(X,Y)}{Var(X)} \simeq -0,132 & (0,5) \\ \text{et } b = \overline{Y} - a\overline{X} = 12,57. & (0,5) \end{cases}$

⑥ On remplace X par 50 on obtient $y \simeq 6$ heures. (0,5) xercice 2 : 1) On choisit une personne au hasard, l'arbre pondéré est donné par:

M : malade

S : positif.



$P(M\cap S)=0{,}63$

$P(M\cap\bar{S})=0{,}07$

$P(\bar{M}\cap S)=0{,}045$

$P(\bar{M}\cap\bar{S})=0{,}255$

(1,5)

2) $* P(M\cap S)=P(M).P_M(S)=0{,}7\times0{,}9=0{,}63$. (1)

$* P(\bar{M}\cap\bar{S})=P(\bar{M}).P_{\bar{M}}(\bar{S})=0{,}3\times0{,}85=0{,}255$. (1)

$* P(S)=P(M\cap S)+P(\bar{M}\cap S)=0{,}63+0{,}045=0{,}675$. (1)

3) $* P_S(\bar{M})=\dfrac{P(\bar{M}\cap S)}{P(S)}=0{,}0667$. (1)

$* P_{\bar{S}}(M)=\dfrac{P(M\cap\bar{S})}{P(\bar{S})}=\dfrac{0{,}07}{0{,}325}=0{,}215$. (1).

Exercice 3 : 1) Les 1000 épreuves sont indépendantes, les deux évènement "avoir une fille" et "avoir un garçon" sont exclusifs, On déduit que $X\sim B(1000, p=0{,}46)$. (1).

2) $E(X)=np=1000\times0{,}46=460$. (0,5)

$Var(X)=np(1-p)=248{,}4$ (0,5) $\Rightarrow \sigma(X)=\sqrt{Var(X)}\simeq15{,}76$. (0,5)

3) La valeur de n est assez grande $(n=1000\geq30)$ et $0{,}2<p<0{,}8$ (1).

et $np=460>20$ alors il est mieux si l'on utilise la loi normale, qui est une bonne approximation de la loi de Bernoulli sous les conditions citées. La loi alors est $X\sim N(\mu=460, \sigma=15{,}76)$.

4) $T=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\Rightarrow T$ est normale. Aussi, (0,5)

$E(T)=E\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right)=\dfrac{1}{\sigma}E(X-\mu)=\dfrac{1}{\sigma}\left[E(X)-\mu\right]=\dfrac{1}{\sigma}\times0=0$. (0,5).

$Var(T)=Var\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right)=\dfrac{1}{\sigma^2}Var(X-\mu)=\dfrac{1}{\sigma^2}Var(X)=\dfrac{1}{\sigma^2}\times\sigma^2=1$. (0,5).

alors $T\sim N(0,1)$

5) $P(465\leq X\leq500)=P\left(\dfrac{465-460}{15{,}76}\leq T=\dfrac{-460}{15{,}76}\leq\dfrac{500-460}{15{,}76}\right)=P(0{,}32\leq T\leq2{,}54)=\Phi(2{,}54)-\Phi(0{,}32)$ (1,5)