Corrigé type (Matière: **Statistique Inférentielle**)

Exercice 1 (08 points).

1. On a

$$\begin{aligned} P_{\alpha}(X=x) &= e^{-\beta}\frac{1}{x!}\exp[x\ln\beta] \\ &= c(\beta)\,h(x)\exp[T(x)\,\eta(\beta)], \quad \textbf{(0.5)} \end{aligned}$$

Donc, le modèle appartient à la famille exponentielle **(0.25)** où

$$c(\beta)=e^{-\beta}>0,\ h(x)=\frac{1}{x!}>0,\ T(x)=x \text{ et } \eta(\beta)=\ln\beta. \quad \textbf{(0.5)}$$

Le support ne dépend pas de β **(0.25)**, donc, d'après le théorème Darmois, on déduit que la statistique exhaustive T est

$$T(X_1,\ldots,X_n)=\sum_{i=1}^{n}T(X_i)=\sum_{i=1}^{n}X_i. \quad \textbf{(0.5)}$$

2. La statistique T est exhaustive pour β si et seulement si la loi de probabilité conditionnelle de $\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ sachant $(T=t)$ ne d epend pas de β **(0.25)**. On sait que T est de loi de Poisson $Pois(n\beta)$. Alors:

$$P(T=t)=\frac{e^{-n\beta}}{t!}(n\beta)^t,\ t\in\mathbb{N}. \quad \textbf{(0.25)}$$

Donc, la statistique T est une statistique exhaustive, car par définition on a

$$\begin{aligned} P\left(X_1=x_1,...,X_n=x_n \mid T=\sum_{i=1}^{n}x_i\right) &= \frac{P\left(X_1=x_1,...,X_n=x_n,\sum_{i=1}^{n}X_i=t\right)}{P\left(\sum_{i=1}^{n}X_i=t\right)} \quad \textbf{(0.25)} \\ &= \begin{cases} \frac{P(X_1=x_1,X_2=x_2,...,X_n=x_n)}{P(T=t)} & \text{si } \sum_{i=1}^{n}x_i=t \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^{n}x_i\neq t, \end{cases} \quad \textbf{(0.25)} \\ &= \begin{cases} \dfrac{\frac{e^{-n\beta}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}\beta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\frac{e^{-n\beta}}{t!}(n\beta)^t} & \text{si } \sum_{i=1}^{n}x_i=t \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^{n}x_i\neq t, \end{cases} \quad \textbf{(0.25)} \\ &= \begin{cases} \dfrac{t!}{n^t\prod_{i=1}^{n}x_i!} & \text{si } \sum_{i=1}^{n}x_i=t \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^{n}x_i\neq t. \end{cases} \quad \textbf{(0.25)} \end{aligned}$$

ne dépend pas de β.

3. T est une statistique complète si

$$E\left(g\left(T\right)\right)=0,\forall\beta\in\left]0,1\right[\Longrightarrow g\left(t\right)=0.\quad \mathbf{(0.5)}$$

On a

$$E\left(g\left(T\right)\right)=\sum_{t=0}^{\infty}g\left(t\right)\frac{e^{-n\beta}}{t!}\left(n\beta\right)^{t}.\quad \mathbf{(0.5)}$$

Donc $E\left(g\left(T\right)\right)$ s'écrit sous la forme série entière $\sum_{k=0}^{\infty}a_{k}z^{k},\ z\in\left]0,1\right[\quad \mathbf{(0.25)}$. On sait que la forme série entière égale à zéro si tous les coefficients sont nuls $(a_k=0)$ $\mathbf{(0.25)}$, ce qui montre que

$$\frac{n^{t}e^{-n\beta}g\left(t\right)}{t!}=0,\quad \mathbf{(0.25)}$$

alors $g\left(t\right)=0,\ \ car\ \frac{n^{t}e^{-n\beta}}{t!}\neq0.$ $\mathbf{(0.25)}$

4. L'information de Fisher contenue dans l'échantillon est

$$I_{n}\left(\beta\right)=-nE\left(\frac{\partial^{2}\ln P_{\beta}\left(X=x\right)}{\partial\beta^{2}}\right),\quad \mathbf{(0.25)}$$

où

$$\ln P_{\beta}\left(X=x\right)=x\ln\beta-\ln\left(x!\right)-\beta.\quad \mathbf{(0.25)}$$

Alors

$$\frac{\partial^{2}\ln P_{\beta}\left(X=x\right)}{\partial\beta^{2}}=-\frac{x}{\beta^{2}}.\quad \mathbf{(0.25)}$$

c'est-à-dire

$$I_{n}\left(\beta\right)=-nE\left(-\frac{X}{\beta^{2}}\right)=\frac{nE\left(X\right)}{\beta^{2}}=\frac{n}{\beta}.\quad \mathbf{(0.25)}$$

L'information de Fisher contenue dans T est

$$I_{T}\left(\beta\right)=-E\left(\frac{\partial^{2}\ln P_{\beta}\left(T=t\right)}{\partial\beta^{2}}\right),\quad \mathbf{(0.25)}$$

où

$$\ln P_{\beta}\left(T=t\right)=t\ln n\beta-\ln t!-n\beta.\quad \mathbf{(0.25)}$$

Alors

$$\frac{\partial^{2}\ln P_{\beta}\left(T=t\right)}{\partial\beta^{2}}=-\frac{t}{\beta^{2}},\quad \mathbf{(0.25)}$$

c'est-à-dire

$$I_{T}\left(\beta\right)=\frac{E\left(T\right)}{\beta^{2}}=\frac{n}{\beta}.\quad \mathbf{(0.25)}$$

Donc $I_{n}\left(\beta\right)=I_{T}\left(\beta\right)$ car T est exhaustive. $\mathbf{(0.5)}$

Exercice 2 (12 points).

1. On a

$$\begin{aligned}E(X) &= \int_{0}^{+\infty}\frac{3x^{2}}{2\alpha}\exp\left(-\frac{3x^{2}}{4\alpha}\right)dx\\ &= \frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\sqrt{3}}.\quad \mathbf{(0.5)}\end{aligned}$$

Alors

$$[E(X)]^2 = \frac{\pi\alpha}{3} \Longrightarrow \frac{3\,[E(X)]^2}{\pi} = \alpha, \quad \textbf{(0.5)}$$

donc

$$\widehat{\alpha}_n^M = \frac{3}{\pi n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]^2 = \frac{3\overline{X}^2}{\pi}. \quad \textbf{(0.5)}$$

2. On a

$$E\left(\widehat{\alpha}_n^M\right) = \frac{3}{\pi}E\left[\overline{X}^2\right] = \frac{3}{\pi}\left[Var\left(\overline{X}\right) + \left(E\left(\overline{X}\right)\right)^2\right] \quad \textbf{(0.25)}$$

où

$$\left(E\left(\overline{X}\right)\right)^2 = \left[E\left(X\right)\right]^2 = \frac{\pi\alpha}{3} \quad \textbf{(0.25)} \text{ et } Var\left(\overline{X}\right) = \frac{E(X^2) - [E(X)]^2}{n}, \quad \textbf{(0.25)}$$

avec

$$E\left(X^2\right) = \int_0^{\infty} \frac{3x^3}{2\alpha}\exp\left(-\frac{3x^2}{4\alpha}\right)dx = \frac{4\alpha}{3}. \textbf{(0.25)}$$

donc

$$Var\left(\overline{X}\right) = \frac{1}{n}\left[\frac{4\alpha}{3} - \frac{\pi\alpha}{3}\right] = \frac{(4-\pi)\,\alpha}{3n}. \quad \textbf{(0.25)}$$

Alors

$$\begin{aligned} E\left(\widehat{\alpha}_n^M\right) &= \frac{3}{\pi}\left[\frac{(4-\pi)\,\alpha}{3n} + \frac{\pi\alpha}{3}\right] \\ &= \frac{(4-\pi)\,\alpha}{\pi n} + \alpha. \quad \textbf{(0.25)} \end{aligned}$$

Donc, $\widehat{\alpha}_n^M$ est asymptotiquement sans biais **(0.25)** car $\lim_{n\to+\infty} E\left(\widehat{\alpha}_n^M\right) = \alpha$. **(0.25)**

La consistance de $\widehat{\alpha}_n^M$, on a $E\left(X^2\right) = \frac{4\alpha}{3} < +\infty$, on sait que, d'après la loi faible des grands nombres,

$$\overline{X} \xrightarrow{P} E\left(X\right), \quad \textbf{(0.25)}$$

et puisque la fonction $g\left(u\right) = \frac{3u^2}{\pi}$ est continue **(0.25)**on a

$$g\left(\overline{X}\right) \xrightarrow{P} g\left(E\left(X\right)\right), \quad \textbf{(0.25)}$$

c-à-d

$$\frac{3\overline{X}^2}{\pi} \xrightarrow{P} \frac{3\left[E\left(X\right)\right]^2}{\pi} = \alpha. \quad \textbf{(0.25)}$$

Donc $\widehat{\alpha}_n^M$ est consistant pour α.

3. L'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\alpha}_n^{MV}$ de α est

$$\widehat{\alpha}_n^{MV} = \arg\max_{\alpha>0} \ln L\left(x_1, \ldots, x_n, \alpha\right),$$

où

$$\begin{aligned} L\left(x_1, \ldots, x_n, \alpha\right) &= L = \prod_{i=1}^{n} \frac{3x}{2\alpha}\exp\left(-\frac{3x^2}{4\alpha}\right) \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{n} 3x_i}{(2\alpha)^n}\exp\left(-\frac{3}{4\alpha}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right), \quad \textbf{(0.25)} \end{aligned}$$

et

$$\ln L = -n\ln 2 - n\ln\alpha + n\ln 3 + \sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \frac{3}{4\alpha}\sum_{i=1}^{n}x_i^2, \quad \color{red}{\mathbf{(0.5)}}$$

alors

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = -\dfrac{n}{\alpha} + \dfrac{3}{4\alpha^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \ldots\ldots (1) \quad \color{red}{\mathbf{(0.25)}} \\ \dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha^2} = \dfrac{n}{\alpha^2} - \dfrac{3}{2\alpha^3}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \ldots\ldots (2) . \quad \color{red}{\mathbf{(0.25)}} \end{cases}$$

On a

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\ln L = 0 \Rightarrow \widehat{\alpha}_n = \frac{3}{4n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2, \quad \color{red}{\mathbf{(0.25)}}$$

et comme

$$\left.\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha^2}\right|_{\alpha=\widehat{\alpha}_n} = \frac{n}{2\widehat{\alpha}_n^2} - \frac{2n}{\widehat{\alpha}_n^2} = \frac{-n}{\widehat{\alpha}_n} < 0, \quad \color{red}{\mathbf{(0.25)}}$$

alors

$$\widehat{\alpha}_n^{MV} = \frac{3}{4n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2. \quad \color{red}{\mathbf{(0.25)}}$$

<u>**2. Efficacité de $\widehat{\alpha}_n^{MV}$**</u>: on a $E\left(\widehat{\alpha}_n^{MV}\right) = \frac{3}{4n}\sum_{i=1}^{n}E\left(X^2\right) = \alpha$ $\color{red}{\mathbf{(0.25)}}$ donc $\widehat{\alpha}_n^{MV}$ est efficace ssi

$$Var\left(\widehat{\alpha}_n^{MV}\right) = \frac{1}{I_n(\alpha)}. \quad \color{red}{\mathbf{(0.25)}}$$

On a

$$\begin{aligned} Var\left(\widehat{\alpha}_n^{MV}\right) &= \frac{9}{16n^2}\sum_{i=1}^{n}Var\left(X^2\right) \\ &= \frac{9}{16n}\left[\frac{32\alpha^2}{9} - \frac{16\alpha^2}{9}\right] = \frac{\alpha^2}{n}. \quad \color{red}{\mathbf{(0.5)}} \end{aligned}$$

et

$$I_n(\alpha) = -nE\left(\frac{\partial^2 \ln f(x,\alpha)}{\partial \alpha^2}\right), \quad \color{red}{\mathbf{(0.25)}}$$

où

$$\frac{\partial^2 \ln f(x,\alpha)}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{3x^2}{2\alpha^3}, \quad \color{red}{\mathbf{(0.25)}}$$

alors

$$I_n(\alpha) = -\frac{n}{\alpha^2} + \frac{3nE\left(X^2\right)}{2\alpha^3} = -\frac{n}{\alpha^2} + \frac{2n}{\alpha^2} = \frac{n}{\alpha^2}. \quad \color{red}{\mathbf{(0.25)}}$$

Donc $\widehat{\alpha}_n^{MV}$ est efficace car $Var\left(\widehat{\alpha}_n^{MV}\right) = \frac{\alpha^2}{n} = \frac{1}{I_n(\alpha)}$ $\color{red}{\mathbf{(0.25)}}$. Le risque quadratique de $\widehat{\alpha}_n^{MV}$ est

$$\begin{aligned} R\left(\widehat{\alpha}_n^{MV}\right) &= EQM\left(\widehat{\alpha}_n^{MV}\right) = Var\left(\widehat{\alpha}_n^{MV}\right) + (b(\alpha))^2 \quad \color{red}{\mathbf{(0.5)}} \\ &= Var\left(\widehat{\alpha}_n^{MV}\right) = \frac{\alpha^2}{n}, \text{ car } b(\alpha) = 0. \quad \color{red}{\mathbf{(0.25)}} \end{aligned}$$

4. On a

$$\sqrt{n}\left(\overline{X} - E(X)\right) \overset{loi}{\to} N(0, Var(X)) \quad \text{quand} \quad n \to +\infty, \quad \color{red}{\mathbf{(0.25)}}$$

et

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\left(\widehat{\alpha}_n^M-\alpha\right) &= \sqrt{n}\left(\frac{3\overline{X}^2}{\pi}-\alpha\right)\\ &= \sqrt{n}\left(\frac{3\overline{X}^2}{\pi}-\frac{3\left[E(X)\right]^2}{\pi}\right)\\ &= \sqrt{n}\left(g\left(\overline{X}\right)-g\left(E(X)\right)\right), \quad \color{red}{(\mathbf{0.5})}\end{aligned}$$

où $g(z)=\frac{3z^2}{\pi}$ dérivable, donc d'après la méthode delta où $g'(\alpha)=\frac{6\alpha}{\pi}\neq 0$ on a

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\left(\widehat{\alpha}_n^M-\alpha\right) &\xrightarrow{loi} N\left(0,\left[g'(\alpha)\right]^2 Var(X)\right) \quad \color{red}{(\mathbf{0.5})}\\ &\xrightarrow{loi} N\left(0,\frac{12(4-\pi)\alpha^3}{\pi^2}\right). \quad \color{red}{(\mathbf{0.25})}\end{aligned}$$

5. En termes de l'échantillon l'intervalle de confiance au niveau 95% pour α est

$$\begin{aligned}IC_{95\%}(\alpha) &= \left[\widehat{\alpha}_n^M - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var\left(\widehat{\alpha}_n^M\right)};\quad \widehat{\alpha}_n^M + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var\left(\widehat{\alpha}_n^M\right)}\right]. \quad \color{red}{(\mathbf{0.5})}\\ &= \left[\widehat{\alpha}_n^M - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{12(4-\pi)\left(\widehat{\alpha}_n^M\right)^3}{n\pi^2}};\quad \widehat{\alpha}_n^M + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{12(4-\pi)\left(\widehat{\alpha}_n^M\right)^3}{n\pi^2}}\right], \quad \color{red}{(\mathbf{0.25})}\end{aligned}$$

où $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi normale standard. Donc:

$$IC_{95\%}(\alpha)=\left[\widehat{\alpha}_n^M-1.96\sqrt{\frac{12(4-\pi)\left(\widehat{\alpha}_n^M\right)^3}{n\pi^2}};\quad \widehat{\alpha}_n^M+1.96\sqrt{\frac{12(4-\pi)\left(\widehat{\alpha}_n^M\right)^3}{n\pi^2}}\right]. \quad \color{red}{(\mathbf{0.25})}$$

Application, on a

$$\widehat{\alpha}_n^M=\frac{3}{\pi n^2}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right]^2=\frac{3}{\pi(135)^2}\left[127\right]^2=1.1646. \quad \color{red}{(\mathbf{0.25})}$$

Donc

$$IC_{95\%}(\alpha)=\left[0.9299;\quad 1.3993\right]. \quad \color{red}{(\mathbf{0.5})}$$