جامعة العربي بن مهيدي - أم البواقي — السنة الجامعية: 2022 − 2023

قسم الرياضيات — مقرر التوزيعات

# الإمتحان الأول (المدة: ساعة و نصف)

**التمرين الأول** ($5$ **نقاط**):

من أجل أي قيم لـ $p \in [1, +\infty[$ يكون التابع $u : x \longmapsto \sqrt{x}$ في الفضاء $W^{1,p}(]0,1[)$؟

**التمرين الثاني** ($5$ **نقاط**):

١. نسلم أن $\displaystyle\sum_{i,j=1,\cdots,N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\overline{\partial v}}{\partial x_j}dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} u\overline{v}dx$ تمثل جداء سلمي على $H^1(\mathbb{R}^N)$ من أجل كل $\lambda > 0$.

- أثبت أن النظيم المعرف انطلاقا من هذا الجداء السلمي يكافئ النظيم المعتاد على $H^1(\mathbb{R}^N)$.

٢. أثبت أنه من أجل كل $\lambda > 0$، و كل $f$ من $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$، يوجد حل وحيد $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ للمعادلة :

$$\Delta u - \lambda u = f \qquad (١)$$

٣. ليكن $f \in S(\mathbb{R}^N)$، استعمل تحويل فوريي لحل المعادلة (١).

**التمرين الثالث** ($5$ **نقاط**):

هل التوابع التالية في $S'(\mathbb{R})$:

- $$f(x) = \begin{cases} x\log|x| - x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

- $Vp\dfrac{1}{x}, \log|x|, e^{ie^x}$.

**التمرين الرابع** ($5$ **نقاط**):

أحسب تحويل فوريي $F(\chi_{[-n,n]})$ حيث $\chi_{[-n,n]}$ التابع المميز للمجال $[-n,n]$ و $n \in \mathbb{N}$.

بالتوفيق

# التصحيح النموذجي

## التمرين الأول (5 نقاط): $\boxed{1}$

$u$ تابع مستمر على المجال $[0,1]$ بالتالي هو في جميع الفضاءات $L^p(]0,1[)$ و كذلك لدينا: $\boxed{1}$

$$u' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \in L^p(]0,1[) \Leftrightarrow p<2.$$

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$

## التمرين الثاني (5 نقاط):

١. نسلم أن $\sum_{i,j=1,\cdots,N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial u}{\partial x_i}\overline{\frac{\partial v}{\partial x_j}}dx+\lambda\int_{\mathbb{R}^N}u\bar{v}dx$ تمثل جداء سلمي على $H^1(\mathbb{R}^N)$ من أجل كل $\lambda>0$.

- يمكن كما فعلنا في الدرس ايجاد الحصر التالي:

$$\min\{C,\lambda\}\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \le \|u\|_* \le \max\{M,\lambda\}\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$$ $\boxed{1}$

حيث $\|u\|_*$ النظيم المنبثق من الجداء السلمي المعطى.

٢. يمكن مثلا استعمال طريق ريس لضمان أنه من أجل كل $\lambda>0$، و كل $f$ من $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$، يوجد حل وحيد $u\in H^1(\mathbb{R}^N)$ للمعادلة:

$$\Delta u - \lambda u = f \qquad (٢)$$ $\boxed{2}$

(يمكن استعمال كذلك طريق الحد الأدنى للتابع الطاقوي-المقدمة في الدرس-)

٣. ليكن $f\in S(\mathbb{R}^N)$، باستعمال تحويل فوريي نجد الحل التالي المعادلة (٢):

$\boxed{2}$ $$u=(2\pi)^{-N}\overline{F}\left(-\frac{1}{\|x\|^2+\lambda}\hat{f}\right).$$

## التمرين الثالث (5 نقاط):

يمكن ايجاد ثابت $C$ حيث: $f(x)\le C+2x^2$ و منه $f\in S'(\mathbb{R})$. $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

يمكن ملاحظة أن $f'(x)=\ln|x|$ أي $\ln|x|\in S'(\mathbb{R})$. لذلك $(\ln|x|)'=P.V\frac{1}{x}$ و منه $P.V\frac{1}{x}\in S'(\mathbb{R})$. $\boxed{1}$

لدينا التابع $e^{irx}$ مستمر على $\mathbb{R}$ أي $e^{irx}\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ و $|e^{irx}|\le 1$ و عليه $e^{irx}\in S'(\mathbb{R})$. $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

## التمرين الرابع (5 نقاط):

ليكن $n\in\mathbb{N}$ تحويل فوريي للتابع $f(x)=\chi_{[-n,n]}$ هو:

$$\hat{f}(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{ixn}-e^{-ixn}}{ix}, & x\neq 0,\\ 2n, & x=0.\end{cases}$$

$\boxed{3}$ $\boxed{2}$

بالتوفيق