UNIVERSITE L'ARBI BEN M'HIDI OUM eL BOUAGHI

Département de Sciences de la Matière 2^{eme} année L. M. D

Module: Equations différentielles. 2022/2023

Enseignante: Soula

<u>Examen, le 15/01/2023</u>

<u>Exercice</u> <u>1:</u> (6 pts)

Déterminer le rayon de convergence et déduire le domaine de convergence des séries entières suivantes:

1) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln\ n}{n^3} x^n$ **2)** $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n})^n x^n$

<u>Exercice</u> <u>2:</u> (6 pts)

Soit f la fonction de période 2 définie par:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, \text{ si } x \in [0, 1] \\ \\ 1, \text{ si } x \in [-1, 0] \end{cases}$$

1) Représenter le graphe de f sur 2 périodes.

2) Ecrire la série de Fourier associée à la fonction f .

<u>Exercice</u> <u>3:</u> (8 pts)

1) Résoudre l'équation différentielle suivante, en utilisant la transformée de Laplace (TL).

$$\begin{cases} y'' + 5y' + 4y = 2 \\ \\ y(0) = 1, \quad y\prime(0) = 3 \end{cases}$$

2) Calculer

$$L((t^3 + \sin \pi t)e^{-2t})$$

Bonne chance

UNIVERSITE L'ARBI BEN M'HIDI OUM eL BOUAGHI
Département de science des matériaux 2^{eme} année L. M. D
Module: Equations différentielles. 2022/2023
Enseignante: Soula

Solutions d'examen

Exercice 1: ($6pts$)

1) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^3} x^n$, On a: $a_n = \frac{\ln n}{n^3}$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \qquad (0.25)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\frac{\ln\ (n+1)}{(n+1)^3}}{\frac{\ln\ n}{n^3}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\ln\ (n+1)}{(n+1)^3} \frac{n^3}{\ln n}\right| \qquad (0.25)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\ln\ (n+1)}{\ln n} \frac{n^3}{(n+1)^3}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\ln\ (n(1+\frac{1}{n}))}{\ln n} \frac{n^3}{(n+1)^3}\right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\ln n+\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} \frac{n^3}{(n+1)^3}\right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left|(1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}) \frac{n^3}{(n+1)^3}\right| = 1 \qquad (1p).$$

Le rayon de convergence est: $R = 1$ (0.5).

La série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^3} x^n$ est converge si $|x| < 1$, d'où le domaine de convergence est: $]-1, 1[$ ($1p$).

2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n})^n x^n$, On a: $a_n = (\sqrt{n})^n$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \qquad (0.25)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|(\sqrt{n})^n|} \qquad (0.25)$$

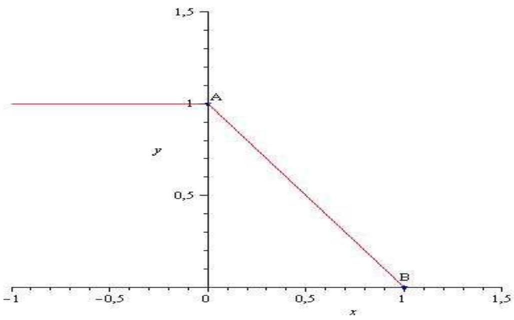
$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty. \qquad (1p)$$

Le rayon de convergence est: $R = 0$. (0.5)

La série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} (\sqrt{n})^n x^n$ est divergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ ($1p$).

Exercice 2: ($6pts$)

1) Représenter le graphe de f sur $[-1, 1]$ ($1.25p$)



$T = 1 - (-1) = 2$ (0.5)

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ (0.5).

Le graphe de f n'est pas symmétrique à $(yy\prime)$, et n'est pas symmétrique à $(0, 0)$, donc f ni paire ni impaire.

• $a_0 = \frac{2}{T}\int_{-1}^{1} f(x)dx$ (0.25)

$= \int_{-1}^{0} 1dx + \int_{0}^{1} (1-x)dx = \int_{-1}^{0} 1dx + \int_{0}^{1} 1dx - \int_{0}^{1} xdx$ (0.25)

$= \frac{3}{2}.$ (0.5)

• $a_n = \frac{2}{T}\int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\omega x)dx$ (0.25)

$= \int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)dx$

$= \int_{-1}^{0} \cos(n\pi x)dx + \int_{0}^{1} (1-x)\cos(n\pi x)dx$

$= \int_{-1}^{0} \cos(n\pi x)dx + \int_{0}^{1} \cos(n\pi x)dx - \int_{0}^{1} x\cos(n\pi x)dx$ (0.25)

$= \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\Big|_{0}^{1} - \left(\frac{x}{n\pi}\sin(n\pi x)\Big|_{0}^{1} - \frac{1}{n\pi}\int_{0}^{1} \sin(n\pi x)dx\right))$

$= \frac{1}{n\pi}\int_{0}^{1} \sin(n\pi x)dx = \frac{-1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)\Big|_{0}^{1} = \frac{-1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi) + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi 0)$

$= \frac{1}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n).$ (0.5)

$$\bullet\ b_n = \frac{2}{T}\int_{-1}^{1} f(x)\sin(n\omega x)dx \qquad (0.25)$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x)\sin(n\pi x)dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \sin(n\pi x)dx + \int_{0}^{1}(1-x)\sin(n\pi x)dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \sin(n\pi x)dx + \int_{0}^{1} \sin(n\pi x)dx - \int_{0}^{1} x\sin(n\pi x)dx \qquad (0.25)$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_{-1}^{0} - \frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_{0}^{1} - \left(\frac{-x}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_{0}^{1} + \frac{1}{n\pi}\int_{0}^{1}\cos(n\pi x)dx\right)$$

$$= \frac{-1}{n\pi} + \frac{1}{n\pi}(-1)^n - \frac{1}{n\pi}(-1)^n + \frac{1}{n\pi} - \left(\frac{-1}{n\pi}(-1)^n + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin(n\pi x)\Big|_{0}^{1}\right)$$

$$= \frac{1}{n\pi}(-1)^n = \frac{(-1)^n}{n\pi} \qquad (0.5)$$

$$SF(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x)) \qquad (0.25)$$

$$= \frac{3}{4} + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x) + \frac{(-1)^n}{n\pi}\sin(n\pi x)\right) \qquad (0.5)$$

<u>Exercice 3</u>: $(8pts)$

$$\begin{cases} y'' + 5y' + 4y = 2 \\ y(0) = 1, \quad y\prime(0) = 3 \end{cases}$$

On pose:

$$\begin{cases} L(y(t)) = L(y) = Y(S) & (0.25). \\ L(y') = SY(S) - y(0) = SY(S) - 1 & (0.25) \\ L(y'') = S^2Y(S) - y(0)S - y'(0) = S^2Y(S) - S - 3. & (0.25) \end{cases}$$

On cherche $Y(S)$

$$y'' + 5y' + 4y = 2 \Rightarrow L(y'' + 5y' + 4y) = L(2)$$

$$\Rightarrow L(y'') + 5L(y') + 4L(y) = 2L(1) \qquad (0.5)$$

$$\Rightarrow S^2Y(S) - S - 3 + 5(SY(S) - 1) + 4Y(S) = 2\frac{1}{S} \qquad (0.5)$$

$$\Rightarrow Y(S)[S^2+5S+4]-S-8=\frac{2}{S}$$

$$\Rightarrow Y(S)=\frac{S^2+8S+2}{S(S^2+5S+4)} \qquad (0.5)$$

On a:

$S^2+5S+4=0,\ \ \Delta=9,\ S_1=-1,\ S_1=-4$ (0.5),

$Y(S)=\frac{S^2+8S+2}{S(S+1)(S+4)}=\frac{a}{S}+\frac{b}{(S+1)}+\frac{c}{(S+4)}$ (0.5)

$a=\frac{1}{2},\ \ b=\frac{5}{3},\ \ c=\frac{-7}{6}$ (0.75)

$Y(S)=\frac{1}{2S}+\frac{5}{3(S+1)}-\frac{7}{6(S+4)}$

$L^{-1}(Y(S))=L^{-1}(\frac{1}{2S}+\frac{5}{3(S+1)}-\frac{7}{6(S+4)})$ (0.5)

$y(t)=\frac{1}{2}L^{-1}(\frac{1}{S})+\frac{5}{3}L^{-1}(\frac{1}{S-(-1)})-\frac{7}{6}L^{-1}(\frac{1}{S-(-4)})$ (0.5)

$y(t)=\frac{1}{2}(1)+\frac{5}{3}e^{-t}-\frac{7}{6}e^{-4t}$ $(1p)$

2) On a:

$L(t^n e^{at})=\frac{n!}{(S-a)^{n+1}}$ (0.5)
et
$L(e^{at}\sin bt)=\frac{b}{(S-a)^2+b^2}$ (0.5)

Alors,

$L((t^3+\sin\pi t)e^{-2t})=L(t^3e^{-2t})+L(e^{-2t}\sin\pi t)$ (0.5)

$$=\frac{3!}{(S+2)^4}+\frac{\pi}{(S+2)^2+\pi^2} \qquad (0.5)$$