Université Larbi Ben M'hidi Om El-Bouaghi
Département MI **M1 Mathématiques appliquées**
Matière : Compléments sur l'intégration et les espaces de Lebesgue **2022/2023**

Examen

Exercice 01 : [04 pts]

Soient $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0 \;\; et \;\; x^2 + y^2 \leq 1\}$ et f la fonction définie sur Ω par $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

1) Montrer que $f \in L^1(\Omega)$ et calculer $\|f\|_{1,\Omega}$.

2) Calculer la limite

$$\lim_{j\to+\infty} \int_\Omega \frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{\sqrt{(x^2+\frac{1}{j}y+y^2)(x^2+\frac{1}{j}x+y^2)}}dxdy.$$

Exercice 02 : [08 pts]

Soit $1 < p \leq 2$. Pour tout $u \in L^p(\Omega)$, on définit l'opérateur

$$\begin{aligned} Tu : L^{p'}(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto Tu(f) = \int_\Omega fu dx, \end{aligned}$$

1) Montrer que $Tu \in (L^{p'}(\Omega))'$ (le dual de $L^{p'}(\Omega)$) et que $\|Tu\|_{(L^{p'}(\Omega))'} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}$.

2) Soit h la fonction définie par $h(x) = \begin{cases} |u(x)|^{p-2}u(x) & si \; u(x) \neq 0, \\ 0 \quad si \;\; u(x) = 0. \end{cases}$

- Montrer que $h \in L^{p'}(\Omega)$ et $\|h\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}$.
- En déduire que $\|Tu\|_{L^{p'}(\Omega)} \geq \|u\|_{L^p(\Omega)}$ et que T définit une isométrie de $L^p(\Omega)$ dans un sous-espace de $(L^{p'}(\Omega))'$.

3) Sachant que $L^r(\Omega)$ est réflixif pour tout $r \geq 2$, montrer que $L^p(\Omega)$ est réflixif.

Exercice 03 : [08 pts]

Soit $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $\psi' \in L_\infty(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $\lim\limits_{j\to\infty} \int_\mathbb{R} \varphi(x)\psi(jx)dx = 0, \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

2) Utiliser la densité de $C_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $L_1(\mathbb{R})$ pour montrer que :

$$\lim_{j\to\infty} \int_\mathbb{R} f(x)\psi'(jx)dx = 0, \forall f \in L_1(\mathbb{R}).$$

Bon courage

Corigé de l'examen

Exercice 01 : [04 pts]

1) f est mesurable sur Ω comme fonction continue sur Ω. ....(0.5 pt)
En utilisant les cordonées polaires, on a

$$\int_\Omega |f(x,y)|dxdy = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \frac{1}{\rho}\rho d\rho = \frac{\pi}{2} < \infty \text{.......................................}(1pt)$$

Alors, $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f\|_{1,\Omega} = \dfrac{\pi}{2}$. .... (0.5 pt)

2) Pour tous $(x,y) \in \Omega$ et $j \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_j(x,y) = \frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{\sqrt{(x^2+\frac{1}{j}y+y^2)(x^2+\frac{1}{j}x+y^2)}}.$$

- Les fonctions f_j sont mesurables comme fonctions continues sur Ω. .... (0.5 pt)
- $f_j \to f$ sur Ω. .... (0.5 pt)
- Pour tous $(x,y) \in \Omega$ et $j \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|f_j(x,y)| \leq f(x,y), \quad et \quad f \in L^1(\Omega), \text{.......................................}(0.5pt)$$

d'après le TCD

$$\lim_{j\to+\infty}\int_\Omega f_j(x,y)dxdy = \int_\Omega f(x,y)dxdy = \frac{\pi}{2} \text{.......................................}(0.5pt)$$

Exercice 02 : [08 pts]

1)Tu est linéaire car l'intégrale est linéaire. .... (0.5pt)

D'après l'inégalité de Hölder $|Tu(f)| \leq \|u\|_{p,\Omega}\|f\|_{p',\Omega}$, pour tout $f \in L^{p'}(\Omega)$, donc Tu est une forme linéaire continue sue $L^{p'}(\Omega)$ et $\|Tu\|_{(L^{p'}(\Omega))'} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}$. ...(0.5pt+0.5pt+0.5pt)

2) $\displaystyle\int_\Omega |h(x)|^{p'}dx = \int_\Omega (|u(x)|^{p-1})^p dx = \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty$ donc $h \in L^{p'}(\Omega)$. .... (1pt)

$$\|h\|_{p',\Omega} = \Big(\int_\Omega (|u(x)|^p dx\Big)^{1/p'} = \|u\|_{p',\Omega}^{p-1}. \text{ .... (1pt)}$$

$$\|Tu\|_{(L^{p'}(\Omega))'} \geq \frac{Tu(h)}{\|h\|_{p',\Omega}} = \frac{\|u\|_{p,\Omega}^p}{\|u\|^{p-1}} = \|u\|_{p,\Omega}. \text{ .... (1pt)}$$

On a déja montrer $\|Tu\|_{(L^{p'}(\Omega))'} \leq \|u\|_{p,\Omega}$, alors $\|Tu\|_{(L^{p'}(\Omega))'} = \|u\|_{p,\Omega}$,
donc l'application

$$T : u \in L^p(\Omega) \mapsto Tu \in (L^{p'}(\Omega))'$$

est une isométrie de $L^p(\Omega)$ dans $T(L^p(\Omega)) \subset (L^{p'}(\Omega))'$. .... (1pt)
3) On a $p' \geq 2$ alors $L^{p'}(\Omega)$ est réflixif donc son dual $(L^{p'}(\Omega))'$ est réflixif. $T(L^p(\Omega))$ est un fermé dans $(L^{p'}(\Omega))'$, donc $T(L^p(\Omega))$ est réflixif.
Pusique $T : L^p(\Omega) \to (L^{p'}(\Omega))'$ est une isométrie, on peut identifier $L^p(\Omega)$ à $T(L^p(\Omega))$, donc $L^p(\Omega)$ est réflixif. .... (2pts)

Exercice 03 : [08 pts]

On pose $M' = \|\psi'\|_{1,\infty}$
1) Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$, alors il existe $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x) = 0, \quad \forall x \notin [a, b]$. ...... (1pt)
Il existe $M, N, N' > 0$ tels que$|\varphi(x)| \leq N, \quad |\varphi'(x)| \leq N' \quad \psi(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$. . . . 1pt
On a

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\psi'(jx)dx\Big| = \Big|\int_a^b \varphi(x)\psi'(jx)dx\Big| &= \Big|\Big[\frac{1}{j}\varphi(x)\psi'(jx)\Big]_a^b - \frac{1}{j}\int_a^b \varphi'(x)\psi(jx)dx\Big| \\ &\leq \Big|\Big[\frac{1}{j}\varphi(x)\psi'(jx)\Big]_a^b\Big| + \Big|\frac{1}{j}\int_a^b \varphi'(x)\psi(jx)dx\Big| \\ &\leq \frac{2NM'}{j} + \frac{N'M(b-a)}{j},\end{aligned}$$

par passage à la limite on trouve $\lim\limits_{j\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\psi'(jx)dx = 0$ .... (2pts)

2)Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$, par densité de $C_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $L_1(\mathbb{R})$ il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ telle que $\|f - \varphi\|_{1,\mathbb{R}} < \varepsilon/(2M')$ ....(1pt)

D'après 1), $\lim\limits_{j\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\psi'(jx)dx = 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pout tout $j > N$, $\Big|\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\psi'(jx)dx\Big| < \varepsilon/2$ ....(1pt)
Pour $j > N$, on a

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbb{R}} f(x)\psi'(jx)dx\Big| &= \Big|\int_{\mathbb{R}} \Big((f(x) - \varphi(x))\psi'(jx) + \varphi(x)\psi'(jx)\Big)dx\Big| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |(f(x) - \varphi(x))\psi'(jx)|dx + \Big|\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\psi'(jx)dx\Big| \\ &\leq M'\int_{\mathbb{R}} |f(x) - \varphi(x)|dx + \Big|\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\psi'(jx)dx\Big| \\ &= M'\|f - \varphi\|_{1,\mathbb{R}} + \Big|\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\psi'(jx)dx\Big| \\ &\leq M'\varepsilon/(2M') + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{j\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\psi'(jx)dx = 0$ .... (2pts)