Corréction d'examen S3 Logique mathématiques 2022/2023

Exercice 1 :

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$r \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q)$	$p \vee r$	$(p \vee r) \Rightarrow q$	(1)
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0	1
0	0	0	1	1	1	0	1	1

3pts

p	q	r	$q \wedge r$	$p \Rightarrow (q \wedge r)$	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$	(2)
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1

3pts

Exercice 2 :

1) La négation est :

$$\exists \epsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in \mathbb{R}, \quad |x - x_0| < \alpha \ \text{ et } \ |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon \qquad (1.5pt)$$

La contraposée est

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon \Rightarrow |x - x_0| \geq \alpha \qquad (1.5pt)$$

2) a)

On va procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la propriété $\mathcal{P}(n) =" 2^{n-1} \leq n! \leq n^n "$. $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée, puisque $2^0 = 1! = 1^1 = 1$. Supposons (0.5pt) maintenant que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ et prouvons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On commence par prouver l'inégalité de gauche. On remarque d'abord que, puisque $n \geq 1$, on a $2 \leq n+1$ d'où l'on déduit

$$2^n = 2 \times 2^{n-1} \leq 2 \times n! \leq (n+1) \times n! \leq (n+1)! \qquad (0.5pt)$$

Pour l'inégalité de droite, on part de l'hypothèse de récurrence et on multiplie par $(n+1)$, pour obtenir

$$(n+1)! \leq (n+1)n^n.$$

Or, $n \leq n+1$ et donc $n^n \leq (n+1)^n$. On en déduit que

$$(n+1)! \leq (n+1) \times (n+1)^n = (n+1)^{n+1}. \qquad (0.5pt)$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vérifiée, ce qui prouve, par récurrence, l'inégalité voulue pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. (0.5pt)

b) *Montrons que* : $(\forall n \in \mathbb{N})$, 7 *divise* $3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

Pour $n = 0$ *on a* 7 *divise* $(3^1 + 2^2)$, *la proposition est vraie pour* $n = 0$. (0.5pt)

Soit $n \in \mathbb{N}$. *Supposons que* 7 *divise* $3^{2n+1} + 2^{n+2}$, *et montrons que* 7 *divise* $3^{2n+3} + 2^{n+3}$.

On a 7 *divise* $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ *c-à-d il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k$ (0.5pt)

on a

$$\begin{aligned}
3^{2n+3} + 2^{n+3} &= 3^{2n+1} \times 3^2 + 2^{n+2} \times 2 \\
&= 3^{2n+1} \times 9 + 2^{n+2} \times 2 \\
&= 3^{2n+1} \times (7+2) + 2^{n+2} \times 2 \\
&= 3^{2n+1} \times 7 + 3^{2n+1} \times 2 + 2^{n+2} \times 2 \\
&= 3^{2n+1} \times 7 + 2\left(3^{2n+1} + 2^{n+2}\right) \\
&= 3^{2n+1} \times 7 + 2 \times 7k \\
&= 7\left(3^{2n+1} + 2k\right)
\end{aligned}$$

(0.5pt)

et comme $(3^{2n+1} + 2k) \in \mathbb{N}$ *,on pose* $k' = 3^{2n+1} + 2k$, *donc*

$$3^{2n+3} + 2^{n+3} = 7k'$$

(0.5pt)

d'où 7 *divise* $3^{2n+3} + 2^{n+3}$.

Conclusion : *D'après le principe de récurrence*

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \ 7 \ \textit{divise} \ \ 3^{2n+1} + 2^{n+2}.$$

Exercice 3 :

1) Soit $x \in A\Delta B$. Par symétrie du problème, on peut toujours supposer que $x \in A$. Nécessairement, $x \notin B$. On en déduit que $x \in A$ et $x \in C_E B$. Ceci donne $x \in A \cap C_E B$. (1pt)
Réciproquement, si par exemple $x \in A \cap C_E B$, $x \in A$ et $x \notin B$, et donc $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$. L'autre possibilité se traite exactement de la même façon. (1pt)

2) En utilisant ou la définition (c'est plus clair avec l'interprétation de la première question), ou le résultat précédent, on a :

$$A\Delta A = \varnothing.$$ (0.5pt)

$$A\Delta \varnothing = A.$$ (0.5pt)

$$A\Delta E = C_E A.$$ (0.5pt)

$$A\Delta C_E A = E.$$ (0.5pt)

3) Comme toujours, on raisonne par double inclusion. Si $x \in (A\Delta B) \cap C$, alors $x \in A\Delta B$ et $x \in C$. Si on a $x \in A$, alors $x \notin B$, et $x \in C$, ce qui donne encore : (1pt)
$x \in A \cap C$ et $x \notin B \cap C$. On a bien $x \in (A \cap C)\Delta(B \cap C)$. Le cas où $x \in B$ se traite exactement de la même façon (par symétrie). (1pt)
Réciproquement, si $x \in (A \cap C)\Delta(B \cap C)$, supposons par exemple que $x \in (A \cap C)$. Alors $x \notin B \cap C$, ce qui implique $x \notin B$ ou $x \notin C$. Mais, (1pt)
$x \in (A \cap C) \implies x \in A$ et $x \in C$. On en déduit que $x \notin B$. D'où $x \in A\Delta B$, et $x \in C$,

Dr k djeddi