Université L'arbi Ben M'hidi

Faculté : Sciences exactes et sciences de la nature et de la vie
Département : MI **Le** 17/01/2023
Niveau: L2 maths **Durée :** 1h30min

Contrôle d'algèbre 03

Exercice 1: (3 pts)

Est ce que les propositions suivantes sont vraies ou fausses? Dans les deux cas justifier votre réponse.

1/ Toute matrice carée n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ est trigonalisable (sur $\mathbb{R}$).

2/ Toute matrice carée est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

3/ Toute matrice carée diagonalisable est inversible.

....

Exercice 2: (13 pts)

On considére la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbb{R})$.

1/ Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A.

2/ La matrice A est elle diagonalisable? Trigonalisable? Justifier votre réponse.

3/ Donner la décomposition de Jordan de la matrice A.

4/ Déterminer une matrice P inversible et une matrice T triangulaire supérieure telle que $T = P^{-1}.A.P$.

5/Calculer T^n.

....

Exercice 3: (4 pts)

Montrer que:

1/ Si M est une matrice carée, e^M est inversible d'inverse e^{-M}.

2/ Si B est une matrice carée diagonalisable, alors

$$e^{\left(P^{-1}.B.P\right)} = P^{-1}.e^B.P$$

La correction

Exercice 1: (3 pts)
1/ Fausse (0.25)
.Car dans $\mathbb{R}$ on peut trouver un polynôme caractéristique irréductible (c-à-d n'admet pas des racines dans $\mathbb{R}$), comme exemple $C(x) = x^2 + 1$ n'admet pas des racines dans $\mathbb{R}$, la matrice qui admet ce polynôme caractéristique n'est pas diagonalisable ni trigonalisable sur $\mathbb{R}$. (0.75)
2/ Fausse (0.25)
Car dans $\mathbb{C}$ c'est vrai tout polynôme caractéristique est réductible mais pas nécéssairement à racines simples. (une matrice est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ SSI son polynôme minimal est scindé à racines simple)(0.75)
3/ Fausse (0.25)
Car toute matrice diagonalisable est inversible SSI n'admet pas zéro comme une valeur propre ($\det A = \lambda_1.\lambda_2.....\lambda_r$).
Ou bien vous pouver utiliser l'exercice 2 et l'exercice 3 comme un contre exemple.(0.75)

....

Exercice 2: (13 pts)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1/ Le polynôme caractéristique

$C_A(x) = \det(A - xI_3) \qquad (0.5)$

$C_A(x) = -(x-2)^2(x-1) \qquad (1pt)$

Le polynôme minimal de A.

Posons $\begin{cases} P_1(x) = (x-2)(x-1) \\ P_2(x) = (x-2)^2(x-1) \end{cases}$, un simple calcul donne $P_1(A) = (A - 2I)(A - I) \neq 0$ "La matrice nulle" (0.5)

Donc $m_A(x) = (x-2)^2(x-1) \quad (0.5)$

2/ La matrice A n'est pas diagonalisable(0.5) *car le polynôme minimal est scindé mais pas à racines simples.(0.5)*
La matrice A est trigonalisable(0.5) *car on a 3 valeurs propres et $A \in M_3(\mathbb{R})$.*(0.5)
3/ La décomposition de Jordan de la matrice A.

On a $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$, $D = \lambda_2 I_3 + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(A - \lambda_2 I_3)^2$ et $N = A - D \quad (1pt)$

D'aprés les calculs on trouve $D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $(1pt)$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $(1pt)$

4/ Déterminer une matrice P inversible et une matrice T triangulaire supérieure telle que $T = P^{-1}.A.P$.

<u>Pour $\lambda_2 = 2$</u>: Soit $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$(A-2I_3)\,v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$
$v = (0, -x_3, x_3)$ et $E_{\lambda_2=2} = vect\{(0,-1,1)\}$ .... (0.5)

<u>Pour $\lambda_1 = 1$</u>:

$(A-I_3)\,v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow v =$
(x_1, x_1, x_1) et $E_{\lambda_1=1} = vect\{(1,1,1)\}$ .... (0.5)

$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det P = -2 \neq 0$.... (0.5)

$P^{-1} = \frac{1}{\det p}\,(comP)^t$ ... (0.5) , $comP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ... (0.5)

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ ... (0.5)

$T = P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ... (0.5)

5/Calculer T^n

On a $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$.... (0.25)

$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc N est nilpotente d'indice 2....(0.5)

$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D^{n-k} N^k = C_n^0 D^n N^0 + C_n^1 D^{n-1} N^1$ ..(0.5)

$T^n = D^n + nD^{n-1}N$.. (0.25)

$T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ .. (0.5)
.

<u>Exercice 3:</u> (4 pts)

1/ Si M est une matrice carée, e^M est inversible d'inverse e^{-M}.

On a M et $-M$ sont commutent car $M(-M) = (-M)M = -M^2$... (0.5)
Et $(e^M).(e^{-M}) = e^{M-M} = e^0 = I_n$.. $(*)$. (0.75)
$(e^{-M}).(e^M) = e^{-M+M} = e^0 = I_n$... $(**)$ .. (0.75)

De $(*)$ et $(**)$ e^M *est inversible d'inverse* e^{-M}
2/ Si B est une matrice carée diagonalisable, alors $\exists P \in M_n(\mathbb{k})$ inversible et $\exists D \in M_n(\mathbb{k})$ diagonale telle que $D = P^{-1}.B.P$... (0.5)

Alors $e^D = e^{\left(P^{-1}.B.P\right)} = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{\left(P^{-1}.B.P\right)^n}{n!}$.... (0.5)

D'autre part on a $\left(P^{-1}.B.P\right)^n = \underbrace{\left(P^{-1}.B.P\right).\left(P^{-1}.B.P\right) .... \left(P^{-1}.B.P\right)}_{n \text{ fois}} = P^{-1}\underbrace{B.B....B}_{n \text{ fois}}.P =$

$P^{-1}.B^n.P$.... (0.5)

Donc $e^{\left(P^{-1}.B.P\right)} = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{\left(P^{-1}.B.P\right)^n}{n!} = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{P^{-1}.B^n.P}{n!} = P^{-1}.\left(\sum\limits_{n\geq 0} \frac{B^n}{n!}\right).P = P^{-1}.e^B.P$.... (0.5)