Université Larbi Ben M'Hidi, Oum El Bouaghi
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques et Informatique

Première année Master — Année Universitaire 2022/2023 (S1)
Mathématiques Appliquées — Mardi 17/01/2023 (**13:00-14:30**)

Examen: Complément de la Théorie des Probabilités

Exercice 1. Soit (X,Y) un couple aléatoire de densité conjointe:

$$f_{XY}(x,y)=\frac{\alpha}{\sqrt{xy}}\mathbf{1}_{]0,\frac{8}{5}[}(x)\,\mathbf{1}_{[x,\frac{8}{5}[}(y).$$

1. Déterminer la valeur de la constante α.

2. Déterminer les densités marginales de X et de Y.

3. Calculer la matrice de covariance de (X,Y).

4. Déterminer les densités conditionnelles de $X|Y=y$ et de $Y|X=x$.

5. Calculer $E(Y \mid X=x)$.

6. On pose $Z=\sqrt{5X}$, trouver la densité de Z. Calculer $E(Z)$.

Exercice 2. Soient Y et Z deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que:

$$P(Y=k,\ Z=\ell)=\begin{cases}\dfrac{\theta\beta^{\ell}}{\ell!}C_{\ell}^{k}p^{k}q^{\ell-k} & \text{si } k\leq\ell,\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}$$

où

$$\beta>0,\ \ q=1-p \ \text{ et } \ 0<p<1.$$

1. Déterminer la valeur de la constante θ.

2. Calculer, en utilisant la fonction génératrice des probabilités, la variance de Z.

Exercice 3. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$: $F_U(u)=u\mathbf{1}_{[0,1]}(u)$. On pose $X_n=\min_{1\leqslant k\leqslant n}(U_k)$.

Montrer que la suite $(nX_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi et donner sa limite.

Corrigé type de l'examen: Complément de la Théorie des Probabilités (2022/2023)

Exercice 1 (13 points).

1. On a

$$\int\int f_{XY}(x,y)\,dxdy = \alpha \int_0^{\frac{8}{5}} \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\int_x^{\frac{8}{5}} \frac{1}{\sqrt{y}} dy \right) dx = 1. \quad \textbf{(1)}$$

Donc $\alpha = 5/16$. **(1)**

2. La densité marginale de X est

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{5}{16} \int_x^{\frac{8}{5}} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}} dy \quad \textbf{(0.5)} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{4\sqrt{x}} - \frac{5}{8}. \quad \textbf{(0.75)} \end{aligned}$$

. La densité marginale de Y est

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{5}{16} \int_0^{y} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}} dx \quad \textbf{(0.25)} \\ &= \frac{5}{8}. \quad \textbf{(0.5)} \end{aligned}$$

3. La matrice de covariance est

$$\sum = \begin{pmatrix} Var(X) & cov(X,Y) \\ cov(X,Y) & Var(Y) \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2, \\ Var(Y) &= E(Y^2) - [E(Y)]^2, \quad \textbf{(0.25)} \end{aligned}$$

et

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y). \quad \textbf{(0.25)}$$

On a

$$E(X) = \int_0^{\frac{8}{5}} x \left(\frac{\sqrt{10}}{4\sqrt{x}} - \frac{5}{8} \right) dx = \frac{4}{15}, \quad \textbf{(0.5)}$$

$$E(X^2) = \int_0^{\frac{8}{5}} x^2 \left(\frac{\sqrt{10}}{4\sqrt{x}} - \frac{5}{8} \right) dx = \frac{64}{375}, \quad \textbf{(0.5)}$$

$$E(Y) = \frac{5}{8} \int_0^{\frac{8}{5}} y\,dy = \frac{4}{5}, \quad \textbf{(0.25)}$$

$$E(Y^2) = \frac{5}{8} \int_0^{\frac{8}{5}} y^2 dy = \frac{64}{75}, \quad \textbf{(0.5)}$$

et

$$E(XY)=\frac{5}{16}\int_0^{\frac{8}{5}}\frac{x}{\sqrt{x}}\left(\int_x^{\frac{8}{5}}\frac{y}{\sqrt{y}}dy\right)dx=\frac{64}{225}.\quad \textcolor{red}{(\mathbf{0.5})}$$

Donc

$$\sum=\begin{pmatrix}\frac{112}{1125} & \frac{16}{225}\\ \frac{16}{225} & \frac{16}{75}\end{pmatrix}.\quad \textcolor{red}{(\mathbf{0.5})}$$

4. La densité conditionnelle de X sachant que $Y=y$ est

$$f_{X|Y}(x,y)=\frac{\frac{5}{16\sqrt{x}\sqrt{y}}}{\frac{4\sqrt{10}-10\sqrt{x}}{16\sqrt{x}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{y}}.\quad \textcolor{red}{(\mathbf{0.5})}$$

La densité conditionnelle de Y sachant que $X=x$ est

$$f_{Y|X}(x,y)=\frac{\frac{5}{16\sqrt{xy}}}{\frac{4\sqrt{10}-10\sqrt{x}}{16\sqrt{x}}}=\frac{5}{\sqrt{y}\left(4\sqrt{10}-10\sqrt{x}\right)}.\quad \textcolor{red}{(\mathbf{0.75})}$$

5. On a

$$\begin{aligned}
E(Y\mid X=x) &= \int_x^{\frac{8}{5}} y f_{Y|X}(x,y)\,dy \quad \textcolor{red}{(\mathbf{0.25})}\\
&= \frac{5}{\left(4\sqrt{10}-10\sqrt{x}\right)}\int_x^{\frac{8}{5}}\frac{y}{\sqrt{y}}dy\\
&= \frac{5\left(\frac{32}{75}\sqrt{10}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)}{\left(4\sqrt{10}-10\sqrt{x}\right)} \quad \textcolor{red}{(\mathbf{0.25})}\\
&= \frac{\left(32\sqrt{10}-50x^{\frac{3}{2}}\right)}{15\left(4\sqrt{10}-10\sqrt{x}\right)}\\
&= \frac{5x+2\sqrt{10x}+8}{15}. \quad \textcolor{red}{(\mathbf{1})}
\end{aligned}$$

6. La densité de $Z=\sqrt{5X}=\varphi(X)$ est,

$$f_Z(z)=\left[\varphi^{-1}(z)\right]' f_X\left(\varphi^{-1}(z)\right),\quad \textcolor{red}{(\mathbf{0.5})}$$

car φ est une fonction croissante, $z\in\left]0,\ 2\sqrt{2}\right[\quad \textcolor{red}{(\mathbf{0.5})}$. Alors

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \frac{2z}{5}f_X\left(\frac{z^2}{5}\right) \quad \textcolor{red}{(\mathbf{0.5})}\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{4}z. \quad \textcolor{red}{(\mathbf{0.5})}
\end{aligned}$$

On a

$$E(Z)=\int_0^{2\sqrt{2}} z\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{4}z\right)dz=\frac{2}{3}\sqrt{2}\quad \textcolor{red}{(\mathbf{1})}$$

Exercice 2 **(05 points)**.

1. On a

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=k}^{\infty}\frac{\theta\beta^{\ell}}{\ell!}C_{\ell}^{k}p^{k}q^{\ell-k}=1, \qquad \textbf{(0.25)}$$

où

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=k}^{\infty}\frac{\theta\beta^{\ell}}{\ell!}C_{\ell}^{k}p^{k}q^{\ell-k} &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=k}^{\infty}\frac{\theta\beta^{\ell}}{\ell!}\frac{\ell!}{k!\,(\ell-k)!}p^{k}q^{\ell-k}\\
&= \theta\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{k}}{k!}\sum_{\ell=k}^{\infty}\frac{(q\beta)^{\ell}}{(\ell-k)!} \qquad \textbf{(0.25)}\\
&= \theta\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{k}}{k!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(q\beta)^{i+k}}{i!}, \text{ où } i=\ell-k \qquad \textbf{(0.25)}\\
&= \theta\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(q\beta)^{k}\left(\frac{p}{q}\right)^{k}}{k!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(q\beta)^{i}}{i!}\\
&= \theta\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(p\beta)^{k}}{k!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(q\beta)^{i}}{i!} \qquad \textbf{(0.25)}\\
&= \theta e^{p\beta}e^{q\beta}=\theta e^{\beta}. \qquad \textbf{(0.5)}
\end{aligned}$$

Donc,

$$\theta=e^{-\beta}. \qquad \textbf{(0.25)}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
P(Z=\ell) &= \sum_{k=0}^{\ell}\frac{e^{-\beta}\beta^{\ell}}{\ell!}C_{\ell}^{k}p^{k}q^{\ell-k} \qquad \textbf{(0.25)}\\
&= \frac{e^{-\beta}\beta^{\ell}}{\ell!}\sum_{k=0}^{\ell}C_{\ell}^{k}p^{k}q^{\ell-k}\\
&= \frac{e^{-\beta}\beta^{\ell}}{\ell!}(p+q)^{\ell}\\
&= \frac{e^{-\beta}\beta^{\ell}}{\ell!}. \qquad \textbf{(0.5)}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
G_{Z}(u) &= \sum_{\ell=0}^{\infty}u^{\ell}P(Z=\ell) \qquad \textbf{(0.5)}\\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty}u^{\ell}\frac{e^{-\beta}\beta^{\ell}}{\ell!}\\
&= e^{-\beta}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(u\beta)^{\ell}}{\ell!}\\
&= e^{-\beta}e^{u\beta}\\
&= e^{\beta(u-1)}. \qquad \textbf{(0.5)}
\end{aligned}$$

On a

$$Var(Z) = G''_Z(1) + G'_Z(1) - [G'_Z(1)]^2, \qquad \textbf{(0.5)}$$

où

$$\begin{aligned} G'_Z(u) &= \beta e^{\beta(u-1)} \Longrightarrow G'_Z(1) = \beta, \qquad \textbf{(0.25)} \\ G''_Z(u) &= \beta^2 e^{\beta(u-1)} \Longrightarrow G''_Z(1) = \beta^2, \qquad \textbf{(0.25)} \end{aligned}$$

alors

$$Var(Z) = \beta^2 + \beta - \beta^2 = \beta. \qquad \textbf{(0.5)}$$

Exercice 3 (02 points).

Soit F_n la fonction de répartition de $(nX_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On a

$$\begin{aligned} F_n(x) &= P\left(n \min_{1\leqslant k\leqslant n}(U_k) \leq x\right) \\ &= P\left(\min_{1\leqslant k\leqslant n}(U_k) \leq \frac{x}{n}\right) \\ &= 1 - P\left(\min_{1\leqslant k\leqslant n}(U_k) > \frac{x}{n}\right) \qquad \textbf{(0.25)} \\ &= 1 - \prod_{k=1}^{n} P\left(U_1 > \frac{x}{n}\right). \qquad \textbf{(0.25)} \end{aligned}$$

Puisque les variables aléatoires $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes et de même loi, on en déduit que

$$F_n(x) = 1 - \left[1 - P\left(U_1 \leq \frac{x}{n}\right)\right]^n \qquad \textbf{(0.25)}$$

De plus,

$$1 - \frac{x}{n} \in [0,1] \Longleftrightarrow x \in [0,n] \qquad \textbf{(0.25)}$$

On en déduit que la fonction de répartition de $(nX_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donnée par

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq n, \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \qquad \textbf{(0.25)}$$

On va étudier, à x fixé, la limite de $F_n(x)$. D'abord, pour $x \leq 0$, il est clair que $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$. Maintenant, pour $x \geq 0$, dès que n est assez grand, on a $x \leq n$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 1 - e^{-x}, \; x \geq 0. \qquad \textbf{(0.5)}$$

On en déduit que $(nX_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. **(0.25)**