UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI – OUM EL BOUAGHI
Département : Mathématiques & Informatique

Module : Théorie variationnelle des équations elliptiques — Année académique : 2022/2023

Examen

Date : 15/01/2023 — Durée : 1h30

Exercice 1 (6+3 = 9 points).

Soit le problème aux limites (P1) $\begin{cases} -\Delta u + 3u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + 2u = g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$

où Ω est un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^n$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$ avec $g \geq 0$ p.p. sur $\partial\Omega$.

1) Établir la formulation variationnelle de (P1) et montrer qu'il admet une solution faible unique u.

2) Montrer que $u \geq 0$ p.p. sur Ω.

Exercice 2 (1+0,5+1,5+4,5+3,5 = 11 points).

Soit $I =]0,1[$ et soit le problème aux limites (P2) $\begin{cases} -(a_1 u')' + a_0 u = f \quad \text{dans} \quad I \\ \big(u(0), u'(1)\big) = (0,1), \end{cases}$

où $(a_1, a_0, f) \in C^1(\bar{I}) \times L^\infty(I) \times L^2(I)$ avec $\min_{x \in \bar{I}} a_1(x) \geq 2$ et $a_0 \geq 0$ p.p. sur I.

On pose $V = \{u \in H^1(I); u(0) = 0\}$ et $\langle \delta_y, v \rangle = v(y)$, $\forall (y, v) \in [0,1] \times H^1(I)$.

1) Soit $y \in [0,1]$. Montrer que δ_y est une forme linéaire continue sur $H^1(I)$.

2) Montrer que V est un sous-espace vectoriel fermé de $H^1(I)$.

3) Démontrer l'inégalité : $\|u\|_{L^2(I)}^2 \leq \frac{1}{2} \|u'\|_{L^2(I)}^2, \forall u \in V$.

4) Établir la formulation variationnelle de (P2) et montrer qu'il admet une solution faible unique.

5) Montrer que (P2) admet une solution forte unique.

Bon succès

Corrigé type de l'examen du module Théorie variationnelle des équations elliptiques

---

Exercice 1 (6+3 = 9 points).

1) Formulation variationnelle (1+1+1=1 points)**.** On suppose que $u \in H^2(\Omega)$. En multipliant les deux membres de l'équation $-\Delta u + 3u = 0$ par une fonction test $v \in H^1(\Omega)$ et intégrant sur Ω, on obtient

$$-\int_\Omega (\Delta u) v dx + 3\int_\Omega uv dx = 0.$$

En appliquant la formule de Green, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)(\gamma_0 v) d\sigma + 3\int_\Omega uv dx = 0. \quad \boxed{\mathbf{1\ pt}}$$

Tenant compte de la condition « $\frac{\partial u}{\partial \eta} = g - 2u$ sur $\partial\Omega$ », on arrive à l'équation

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + 3\int_\Omega uv dx + 2\int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)(\gamma_0 v) d\sigma = \int_{\partial\Omega} g\gamma_0 v d\sigma. \quad \boxed{\mathbf{1\ pt}}$$

Toutes les intégrales apparaissant dans la dernière équation existent dès que $u \in H^1(\Omega)$, on n'a plus besoin que u soit dans $H^2(\Omega)$. D'où la formulation variationnelle

$$(\mathrm{PV1})\begin{cases} \text{trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + 3\int_\Omega uv dx + 2\int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)(\gamma_0 v) d\sigma = \int_{\partial\Omega} g\gamma_0 v d\sigma, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases} \quad \boxed{\mathbf{1\ pt}}$$

Résolution (0,25+0,75+1+1=3 points)**.** Posons $V = H^1(\Omega)$,

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + 3\int_\Omega uv dx + 2\int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)(\gamma_0 v) d\sigma\ , \ \langle \ell, v\rangle = \int_{\partial\Omega} g\gamma_0 v d\sigma, \ \ \forall (u,v) \in V^2,$$

et montrons que toutes les conditions du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites.

La condition LM1 est satisfaite car $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert d'après le théorème 2.3. $\boxed{\mathbf{0,25\ pt}}$

Montrons que les conditions LM2 et LM3 sont satisfaites. Pour tout $(u,v) \in V^2$, on a

$(\nabla u, \nabla v) \in L^2(\Omega)^n \times L^2(\Omega)^n \Rightarrow \nabla u . \nabla v \in L^1(\Omega)$ et

$$\left|\int_\Omega \nabla u . \nabla v dx\right| \le \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n} \le \|u\|_V \|v\|_V,$$

$(u,v) \in L^2(\Omega)^2 \Rightarrow uv \in L^1(\Omega)$ et

$$\left|\int_\Omega uv dx\right| \le \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \le \|u\|_V \|v\|_V,$$

$(\gamma_0 u, \gamma_0 v) \in L^2(\partial\Omega) \times L^2(\partial\Omega) \ \Rightarrow \ (\gamma_0 u)(\gamma_0 v) \in L^1(\partial\Omega)$ et (voir le théorème 2.8)

$$\left| \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)(\gamma_0 v) d\sigma \right| \leq \|\gamma_0 u\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_{\gamma_0}^2 \|u\|_V \|v\|_V .$$

On en déduit que $a(\cdot,\cdot)$ est une application bien définie de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$ et que

$$|a(u,v)| \leq \left(4 + 2C_{\gamma_0}^2\right) \|u\|_V \|v\|_V , \ \forall (u,v) \in V^2.$$

La bilinéarité de $a(\cdot,\cdot)$ étant claire, on conclut qu'elle est une forme bilinéaire continue sur $V \times V$. $\boxed{\mathbf{1}\ \boldsymbol{pt}}$

Passons à la condition LM4. Pour tout $u \in V$, on a

$$a(u,u) = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + 3\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|\gamma_0 u\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \geq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u\|_V^2 ,$$

donc $a(\cdot,\cdot)$ est coercive sur V. $\boxed{\mathbf{1}\ \boldsymbol{pt}}$

Montrons maintenant que les conditions LM5 et LM6 sont satisfaites. Pour tout $v \in V$, on a

$(g, \gamma_0 v) \in L^2(\partial\Omega)^2 \ \Rightarrow \ g\gamma_0 v \in L^1(\partial\Omega)$ et (voir le théorème 2.8)

$$\left| \int_{\partial\Omega} g\gamma_0 v d\sigma \right| \leq \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} C_{\gamma_0} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

On en déduit que ℓ est une application bien définie de V dans $\mathbb{R}$ et que

$$|\langle \ell, v \rangle| \leq \left(C_{\gamma_0} \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\right) \|v\|_V , \forall v \in V.$$

La linéarité de ℓ étant évidente, on conclut qu'elle est une forme linéaire continue sur V. $\boxed{\mathbf{0,75}\ \boldsymbol{pt}}$

<u>Conclusion</u> : Les six conditions du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites, on conclut que (PV1) admet une solution unique, donc (P1) admet une solution faible unique u.

2) (1+1+1= 3 points) On applique le théorème 4.6 (principe du maximum) en prenant $E = H^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, $A = I_n \in M_n(L^\infty(\Omega))$, $a_0 = 3 \in L^\infty(\Omega)$, $b_1 = 2 \in L^\infty(\partial\Omega)$:

PM1) $\displaystyle\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla v dx + \int_\Omega 3v^2 dx + \int_{\partial\Omega} 2\left(\gamma_0 v\right)^2 d\sigma = a(v,v) \geq \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 , \ \forall v \in H^1(\Omega),$ $\boxed{\mathbf{1}\ \boldsymbol{pt}}$

PM2) $\displaystyle\int_\Omega \nabla u . \nabla v dx + \int_\Omega 3uv dx + \int_{\partial\Omega} 2\gamma_0 u \gamma_0 v d\sigma = a(u,v) = \int_{\partial\Omega} g\gamma_0 v d\sigma \geq 0, \ \forall v \in \left(H^1(\Omega)\right)_+,$

car $g \geq 0$ et, par le corollaire 4,3, $\gamma_0 v \geq 0 \ \forall v \in \left(H^1(\Omega)\right)_+$, $\boxed{\mathbf{1}\ \boldsymbol{pt}}$

PM3) $u_- \in H^1(\Omega)$, par la proposition 4.2. $\boxed{\mathbf{1}\ \boldsymbol{pt}}$

<u>Conclusion</u> : Les trois conditions du théorème 4.6 (principe du maximum) sont satisfaites, on conclut que $u \geq 0$ p.p. sur Ω.

Exercice 2 (1+0,5+1,5+4,5+3,5 = 11 points).

1) (0,75+0,25 = 1 point) Pour tout $v \in H^1(I)$, on a, en vertu du théorème 2.6, $v \in C(\bar{I})$ et $\|v\|_{L^\infty(I)} \leq C_I \|u\|_{H^1(I)}$, donc $|v(y)| \leq \|v\|_{L^\infty(I)} \leq C_I \|u\|_{H^1(I)}$. On en déduit que δ_y est une application bien définie de $H^1(I)$ dans $\mathbb{R}$ et que $|\langle \delta_y, v\rangle| \leq C_I \|v\|_{H^1(I)}$, $\forall v \in H^1(I)$. $\boxed{\mathbf{0,75\ pt}}$

D'autre part, δ_y est clairement linéaire, donc δ_y est une forme linéaire continue sur $H^1(I)$. $\boxed{\mathbf{0,25\ pt}}$

2) De la question 1, δ_0 est une forme linéaire continue sur $H^1(I)$. On a $V = \operatorname{Ker}\delta_0$, donc V est un sous-espace vectoriel fermé de $H^1(I)$. $\boxed{\mathbf{0,5\ pt}}$

3) (0,5+0,5+0,5 = 1,5 points) Soit $u \in V$. Alors $u \in H^1(I)$ et $u(0) = 0$, donc, par le théorème 2.6,

$$\forall x \in I,\ u(x) = \int_0^x u'(t)dt = \int_I \mathbb{1}_{]0,x]}(t)u'(t)dt. \quad \boxed{\mathbf{0,5\ pt}}$$

D'où, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\forall x \in I,\ \left(u(x)\right)^2 \leq \left(\int_I \left(\mathbb{1}_{]0,x]}(t)\right)^2 dt\right)\left(\int_I \left(u'(t)\right)^2 dt\right) = \|u'\|^2_{L^2(I)}x. \quad \boxed{\mathbf{0,5\ pt}}$$

S'ensuit que

$$\|u\|^2_{L^2(I)} = \int_I \left(u(x)\right)^2 dx \leq \|u'\|^2_{L^2(I)} \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}\|u'\|^2_{L^2(I)}. \quad \boxed{\mathbf{0,5\ pt}}$$

4) Formulation variationnelle (0,75 +0,75+0,75=2,25 points)**.** Il s'agit d'un problème mixte Dirichlet-Neumann. Pour tenir compte de la condition de Dirichlet « $u(0) = 0$ », on utilise V comme espace de fonctions test. On suppose que $u \in H^2(I)$. En multipliant les deux membres de l'équation $-(a_1u')' + a_0u = f$ par une fonction test $v \in V$ et intégrant sur I, on obtient

$$-\int_I (a_1u')'vdx + \int_I a_0uvdx = \int_I fvdx.$$

En appliquant la formule d'intégration par parties, on obtient

$$\int_I a_1u'v'dx - \left(a_1(1)u'(1)v(1) - a_1(0)u'(0)v(0)\right) + \int_I a_0uvdx = \int_I fvdx. \quad \boxed{\mathbf{0,75\ pt}}$$

Tenant compte de la condition de Neumann « $u'(1) = 1$ » et du fait que $v \in V$, on arrive à l' équation

$$\int_I a_1u'v'dx + \int_I a_0uvdx = \int_I fvdx + a_1(1)v(1). \quad \boxed{\mathbf{0,75\ pt}}$$

Toutes les intégrales apparaissant dans la dernière équation existent dès que $u \in V$, on n'a donc plus besoin que u soit dans $H^2(I)$. D'où la formulation variationnelle

$$
\text{(PV2)}\begin{cases} \text{trouver} \quad u \in V \quad \text{tel que} \\ \displaystyle\int_I a_1 u'v'dx + \int_I a_0 uvdx = \int_I fvdx + a_1(1)v(1), \ \ \forall v \in V. \end{cases} \quad \boxed{\mathbf{0,75}\ \boldsymbol{pt}}
$$

Résolution (0,25 +0, 5+1+0,5=2,25 points)**.** Posons

$$
\|v\|_V = \|v\|_{H^1(I)}, \ \ a(u,v) = \int_I a_1 u'v'dx + \int_I a_0 uvdx\,, \ \ \langle \ell, v\rangle = \int_I fvdx + a_1(1)v(1), \ \forall (u,v) \in V^2,
$$

et montrons que toutes les conditions du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites.

La condition LM1 est satisfaite parce que, de la question 2, V est un sous-espace vectoriel fermé de $H^1(I)$ lequel est un espace de Hilbert d'après le théorème 2.3. $\boxed{\mathbf{0,25}\ \boldsymbol{pt}}$

Montrons que les conditions LM2 et LM3 sont satisfaites. Pour tout $(u,v) \in V^2$, on a

$(a_1, u', v') \in C^1(\bar{I}) \times L^2(I)^2 \subset L^\infty(I) \times L^2(I)^2 \ \Rightarrow \ (a_1 u', v') \in L^2(I)^2 \Rightarrow a_1 u'v' \in L^1(I)$ et

$$
\left|\int_I a_1 u'v'dx\right| \le \|a_1 u'\|_{L^2(I)}\|v'\|_{L^2(I)} \le \|a_1\|_{L^\infty(I)}\|u'\|_{L^2(I)}\|v'\|_{L^2(I)} \le \|a_1\|_{L^\infty(I)}\|u\|_V\|v\|_V\,,
$$

$(a_0, u, v) \in L^\infty(I) \times L^2(I)^2 \ \Rightarrow \ (a_0 u, v) \in L^2(I)^2 \Rightarrow a_0 uv \in L^1(I)$ et

$$
\left|\int_I a_0 uvdx\right| \le \|a_0 u\|_{L^2(I)}\|v\|_{L^2(I)} \le \|a_0\|_{L^\infty(I)}\|u\|_{L^2(I)}\|v\|_{L^2(I)} \le \|a_0\|_{L^\infty(I)}\|u\|_V\|v\|_V\,,
$$

On en déduit que $a(\cdot,\cdot)$ est une application bien définie de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$ et que

$$
|a(u,v)| \le \left(\|a_1\|_{L^\infty(I)} + \|a_0\|_{L^\infty(I)}\right)\|u\|_V\|v\|_V\,, \quad \forall (u,v) \in V^2.
$$

La bilinéarité de $a(\cdot,\cdot)$étant claire, c'est donc une forme bilinéaire continue sur $V \times V$. $\boxed{\mathbf{0,5}\ \boldsymbol{pt}}$

Passons à la condition LM4. Pour tout $u \in V$, on a, en utilisant le fait que $a_1(x) \ge 2 \ \forall x \in \bar{I}$ et que $a_0 \ge 0$ p.p. sur I ainsi que l'inégalité de la question 3,

$$
a(u,u) = \int_I (a_1 u')^2 dx + \int_I a_0 u^2 dx \ge 2\int_I (u')^2 dx = 2\|u'\|_{L^2(I)}^2 = \|u'\|_{L^2(I)}^2 + \|u'\|_{L^2(I)}^2
$$

$$
\ge \|u'\|_{L^2(I)}^2 + 2\|u\|_{L^2(I)}^2 \ge \|u'\|_{L^2(I)}^2 + \|u\|_{L^2(I)}^2 = \|u\|_V^2\,,
$$

donc $a(\cdot,\cdot)$ est coercive sur V. $\boxed{\mathbf{1}\ \boldsymbol{pt}}$

Montrons maintenant que les conditions LM5 et LM6 sont satisfaites. De la question 1, $a_1(1)\delta_1$ est une forme linéaire continue sur V. D'autre part, l'application $v \mapsto \int_I fvdx = (f|v)_{L^2(I)}$ est clairement une forme linéaire sur V et, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$
\left|(f|v)_{L^2(I)}\right| \le \|f\|_{L^2(I)}\|v\|_{L^2(I)} \le \|f\|_{L^2(I)}\|v\|_V, \ \ \forall v \in V.
$$

On en déduit que ℓ est la somme de deux formes linéaires continues sur V, c'est donc une forme linéaire continue sur V. $\boxed{\mathbf{0,5}\ \boldsymbol{pt}}$

<u>Conclusion</u> : Les six conditions du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites, on conclut que (PV2) admet une solution unique, donc (P2) admet une solution faible unique.

5) (0,5+1+0,25+0,25+0,25+0,25+0,25+0,25+0,5=3,5 points) Soit u la solution faible de (P2). On va montrer que u est l'unique solution forte de (P2).

On a : $u \in V$ et

$$\int_I a_1 u' v' dx + \int_I a_0 u v dx = \int_I f v dx + a_1(1) v(1), \ \forall v \in V. \ (1)$$

Vu que $D(I) \subset H_0^1(I) \subset V$, donc $D(I) \subset V$ et $\varphi(1) = 0 \ \forall \varphi \in D(I)$, on déduit de (1) que

$$\int_I a_1 u' \varphi' dx + \int_I a_0 u \varphi dx = \int_I f \varphi dx, \ \forall \varphi \in D(I) \Rightarrow \langle a_1 u', \varphi' \rangle + \langle a_0 u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \ \forall \varphi \in D(I)$$

$$\Rightarrow \langle -(a_1 u')', \varphi \rangle + \langle a_0 u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \ \forall \varphi \in D(I) \Rightarrow \langle -(a_1 u')' + a_0 u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \ \forall \varphi \in D(I),$$

i.e.

$$-(a_1 u')' + a_0 u = f \text{ dans } I, \text{ au sens des distributions.} \ (2) \quad \boxed{\mathbf{0,5\ pt}}$$

D'où

$$(a_1 u')' = a_0 u - f \in L^2(I).$$

On a $\min_{x \in \bar{I}} a_1(x) \geq 2$, donc $a_1(x) \geq 2$, $\forall x \in \bar{I}$. En exploitant le théorème 3.5 (chapitre 3) pour $m = 0$, on obtient que $u \in H^2(I)$. $\boxed{\mathbf{1\ pt}}$

En utilisant (2) et le fait que $(a_1 u')' \in L^2(I)$, parce que $u \in H^2(I)$ et $a_1 \in C^1(\bar{I})$, on en déduit que

$$-(a_1 u')' + a_0 u = f \quad \text{p.p. sur } I. \ (3) \quad \boxed{\mathbf{0,25\ pt}}$$

D'autre part, on a $u(0) = 0$, puisque $u \in V$. $\boxed{\mathbf{0,25\ pt}}$

Il reste à montrer que $u'(1) = 1$. Vu que $u \in H^2(I)$ et $a_1 \in C^1(\bar{I})$, en utilisant (1) et appliquant la formule d'intégration par parties (en sens inverse), on obtient

$$-\int_I (a_1 u')' v dx + \big(a_1(1) u'(1) v(1) - a_1(0) u'(0) v(0)\big) + \int_I a_0 u v dx =$$

$$\int_I f v dx + a_1(1) v(1), \ \forall v \in V. \ \boxed{\mathbf{0,25\ pt}}$$

Tenant compte de (3) et du fait que $v(0) = 0 \ \forall v \in V$, on en déduit que

$$a_1(1) u'(1) v(1) = a_1(1) v(1), \ \forall v \in V. \ \boxed{\mathbf{0,25\ pt}}$$

Vu que $a_1(1) \neq 0$, puisque $a_1(1) \geq \min_{x \in \bar{I}} a_1(x) \geq 2$, on peut diviser par $a_1(1)$ pour arriver à

$$u'(1) v(1) = v(1), \ \forall v \in V. \ \boxed{\mathbf{0,25\ pt}}$$

En choisissant $v(x) = x \ \forall x \in I$ (ce choix est valable car $v \in C^\infty(\bar{I}) \subset H^1(I)$ et $v(0) = 0$, i.e. $v \in V$), on déduit que $u'(1) = 1$. $\boxed{\mathbf{0,25\ pt}}$.

On conclut que u est une solution forte du problème (P2).

D'un autre coté, si w est une (autre) solution forte de (P2), alors w est aussi une solution faible et donc, par l'unicité de la solution faible prouvée à la question 4, on a nécessairement $w = u$. Ceci prouve que u est l'unique solution forte de (P2). $\boxed{\mathbf{0,5\ pt}}$