Solution 1 (4 points) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. **a)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ *converge* $\iff \alpha > 1$, ... (0,5)

   b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{t^\alpha}$ *converge* $\iff \alpha < 1$, ... (0,5)

   c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ *converge* $\iff \alpha > 0$. .... (0,5)

   a) *La fonction* $t \mapsto \dfrac{\sin^2(t)}{t^\beta}$ *est continue et donc localement intégrable sur* $]0,1]$. *On a* $\sin(t) \underset{0}{\sim} t$ *donc* $\sin^2(t) \underset{0}{\sim} t^2$, *par suite*

$$\frac{\sin^2(t)}{t^\beta} \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{t^\beta} = \frac{1}{t^{\beta-2}}.$$

   .... (0,75)

   D'après ce qui précède, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{\beta-2}} dt$ *converge ssi* $\beta - 2 < 1$ *i.e.* $\beta < 3$.

   Par comparaison, on déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin^2(t)}{t^\beta} dt$ *converge ssi* $\beta < 3$. .... (0,5)

   b) *La fonction* $t \mapsto \dfrac{\arctan\left(\frac{1}{t}\right)}{t^\beta}$ *est continue et donc localement intégrable sur* $[1, +\infty[$. *On a* $\arctan(x) \underset{0}{\sim} x$ *donc* $\arctan\left(\frac{1}{t}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$, *par suite*

$$\frac{\arctan\left(\frac{1}{t}\right)}{t^\beta} \underset{0}{\sim} \frac{\frac{1}{t}}{t^\beta} = \frac{1}{t^{\beta+1}}.$$

   .... (0,75)

   D'après ce qui précède, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\beta+1}} dt$ *converge ssi* $\beta + 1 > 1$ *i.e.* $\beta > 0$.

   Par comparaison, on déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{t}\right)}{t^\beta} dt$ *converge ssi* $\beta > 0$. ..... (0,5)

Solution 2 (5,5 points+1,5 points bonus) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx} + \sin x$, $n \in \mathbb{N}$.

1. *Convergence simple.* *Pour* $x < 0$ *fixé, on a* $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha x e^{-nx} = -\infty$, *et donc* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = -\infty$. *Ainsi, la suite* $(f_n(x))_n$ *ne converge en aucun point* $x \in]-\infty, 0[$. .... (0,5)

   Pour $x > 0$ *fixé, on a* $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha x e^{-nx} = 0$ *par croissances comparées puissance / exponentielle.* .... (0,5)

   D'où $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \sin x$. .... (0,25)

Si $x = 0$, *on a* $f_n(0) = 0$. .... (0,25)

Ainsi, la suite $(f_n)_n$ *converge simplement sur* $[0, +\infty[$ *vers la fonction* $f : x \mapsto \sin x$. (0,25)

Convergence uniforme. *Etudions la fonction* $x \mapsto g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = n^\alpha x e^{-nx}$ *sur* $[0, +\infty[$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, g_n *est dérivable sur* $[0, +\infty[$, *et l'on a*

$$g_n'(x) = n^\alpha e^{-nx} - n^{\alpha+1} x e^{-nx} = n^\alpha e^{-nx}(1 - nx).$$

La dérivée est positive pour $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right[$, *nulle en* $x = \frac{1}{n}$ *et négative pour* $x \in \left]\frac{1}{n}, +\infty\right[$. *Donc* g_n *croît sur* $\left[0, \frac{1}{n}\right[$, *décroît sur* $\left]\frac{1}{n}, +\infty\right[$ *et admet un maximum en* $x_n = \frac{1}{n}$:

$$g_n(x_n) = n^\alpha \frac{1}{n} e^{-n\frac{1}{n}} = n^{\alpha-1} e^{-1}.$$

.... (1)

Si $\alpha \geq 1$, *alors*

$$\sup_{x \in [0,+\infty[} g_n(x) = g_n(x_n) = n^{\alpha-1} e^{-1} \nrightarrow 0 \quad \textit{quand } n \to +\infty,$$

donc la suite $(f_n)_n$ *ne converge pas uniformément vers* f *sur* $[0, +\infty[$. .... (0,75)

Si $\alpha < 1$, *alors*

$$\sup_{x \in [0,+\infty[} g_n(x) = g_n(x_n) = n^{\alpha-1} e^{-1} \longrightarrow 0 \quad \textit{quand } n \to +\infty,$$

donc la suite $(f_n)_n$ *converge uniformément vers* f *sur* $[0, +\infty[$. .... (0,5)

2. *Désormais, on suppose* $\alpha = 1$. *D'après ce qui précède, la suite* $(f_n)_n$ *ne converge pas, dans ce cas, uniformément sur* $[0, +\infty[$ *vers* f.

   Soit $a > 0$ *arbitraire. Choisissons* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *assez grand tel que* $\frac{1}{n_0} < a$. *Pour tout* $n \geq n_0$, *on a* $\frac{1}{n} < a$ *et la fonction* g_n *est donc décroissante sur* $[a, +\infty[$, *d'où*

$$\forall n \geq n_0 : \qquad \sup_{x \in [a,+\infty[} g_n(x) = g_n(a) = nae^{-na}.$$

   .... (1)

   Comme $\lim_{n \to +\infty} nae^{-na} = 0$ *(par croissances comparées), on déduit que la convergence de la suite* $(f_n)_n$ *vers* f *est uniforme sur l'intervalle* $[a, +\infty[$. .... (0,5)

3. ***Bonus.*** *Considérons les fonctions* f_n *sur l'intervalle* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

- *Les f_n sont continues et donc intégrables sur l'intervalle compact $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;* . (0,25)
- *$(f_n)_n$ converge simplement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers la fonction f ;* . . . . (0,25)
- *Les f_n sont uniformément bornées sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, en effet,*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : \quad |f_n(x)| = nxe^{-nx} + \sin x \leq e^{-1} + 1 \ ;$$

. . . . (0,25)

- *La convergence de $(f_n)_n$ vers f est uniforme sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ et donc sur tout intervalle compact inclus dans l'intervalle ouvert $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.* . . . . (0,25)

  D'après un théorème sur l'intégrabilité de la limite d'une suite de fonctions intégrables, on déduit que la suite numérique de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(x)dx$ converge . . . . (0,25)

  et que l'on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(x)dx = \int_0^{\pi/2} f(x)dx = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1.$$

. . . . (0,25)

Solution 3 (5 points) *Soit la série entière de variable réelle $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$.*

1. *<u>Détermination du rayon de convergence R.</u> Comme*

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

. . . . (0,5)

Les séries entières $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$ ont le même rayon de convergence. (0,5)

Posons $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \to L = 1 \quad \text{quand } n \to \infty,$$

d'où, en vertu de la règle de d'Alembert pour les séries entières, le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$ est $\frac{1}{L} = 1$.

On en déduit que le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$ est $R = 1$. (1)

2. *Étude de la convergence en R et en $-R$.*

Pour $x = 1$, la série obtenue est la série numérique $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. *Or,* $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}$, *ce dernier étant le terme général d'une suite de Riemann divergente* ($\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$), *par conséquent la série* $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ *diverge.* .... (1)

Si $x = -1$, la série obtenue est la série numérique alternée $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. *Manifestement la suite* $\left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)_n$ *est décroissante, car pour tout entier $n \geq 1$, on a* $0 < \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{\pi}{2}$ *et donc* $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \leq \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ *en raison de la croissance de la fonction sinus sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. .... (0,5)

Comme de plus, la suite $\left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$ *tend vers 0 quand $n \to \infty$,* .... (0,25)

alors par le critère (de Leibniz) spécial pour les séries alternées, la série $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ *est convergente.* .... (0,25)

3. *Continuité de* $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$.

D'après la théorie générale des séries entières, la somme $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$ *est continue sur l'intervalle de convergence* $]-1, 1[$. .... (0,5)

Comme de plus, $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$ *converge pour $x = -1$, on déduit qu'elle est continue en $x = -1$ à droite en vertu du deuxième lemme d'Abel. Par suite, S est continue sur* $[-1, 1[$. .... (0,25)

Il en résulte que

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} S(x) = S(-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

.... (0,25)

Solution 4 (**5,5 points+1,25 points bonus**) *Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction* $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n(1 + nx)}.$$

1. *La série proposée est une série alternée de fonctions* $f_n = (-1)^n g_n$ *où* $g_n(x) = \frac{1}{n(1+nx)} > 0$ *pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x \geq 0$.* .... (0,25)

Pour tout $x \in [0, +\infty[$ fixé, la suite réelle de terme général $g_n(x)$ est visiblement décroissante. .... (0,25)

De plus, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,+\infty[: \quad g_n(x) = \frac{1}{n(1+nx)} \leq \frac{1}{n} \to 0 \quad \textit{quand } n \to \infty,$$

ce qui signifie que la suite de fonctions $(g_n)_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$ vers la fonction nulle. .... (0,5)

D'après le critère spécial de convergence uniforme des séries alternées de fonctions, on déduit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ est uniformément convergente sur $[0,+\infty[$. (0,5)

Pour tout $x \in [0,+\infty[$, posons $F(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

2. *Pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est continue sur $[0,+\infty[$. Puisque la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$, la somme F est continue sur $[0,+\infty[$.* (0,5)

3. *Puisque F est continue sur $[0,+\infty[$, on a en particulier*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} F(x) &= F(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} (0,5) \\ &= -\ln 2. (0,25) \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout entier $n \geq 1$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$, et comme $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$ vers F, il vient par le théorème de passage à la limite sous le signe $\sum$,

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\lim_{x\to+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

.... (0,5)

4. *Pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ et*

$$f_n'(x) = \frac{(-1)^n}{n} \frac{-n}{(1+nx)^2} = \frac{(-1)^{n+1}}{(1+nx)^2}.$$

.... (0,25)

Soit $a > 0$ arbitraire. Pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [a,+\infty[$, on a

$$|f_n'(x)| = \frac{1}{(1+nx)^2} \leq \frac{1}{(1+na)^2} \leq \frac{1}{n^2 a^2}.$$

.... (0,25)

La série de terme général $\frac{1}{n^2a^2}$ est convergente, donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n'$ est normalement convergente sur l'intervalle $[a,+\infty[$. .... (0,5)

Il s'ensuit que la série $\sum_{n\geq 1} f_n'$ est uniformément convergente sur $[a,+\infty[$. .... (0,25)

5. *D'après la question précédente, la série $\sum_{n\geq 1} f_n'$ est uniformément convergente sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ avec $a>0$. A fortiori, elle est uniformément convergente sur tout intervalle compact contenu dans $]0,+\infty[$.* .... (0,25)

   Comme de plus, la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément et donc simplement sur $[0,+\infty[$ (la convergence en un point $x_0\in[0,+\infty[$ suffit), on déduit par le théorème de dérivation terme à terme, que la fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$ .... (0,5)

   et que

$$\forall x\in\,]0,+\infty[\,:\quad F'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(1+nx)^2}.$$

   .... (0,25)

6. ***Bonus.*** *Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction f_n est intégrable sur l'intervalle compact $[0,1]$ car continue.* .... (0,25)

   Comme de plus, la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$, alors la somme F est intégrable sur $[0,1]$, ... (0,25)

   et on a la formule d'intégration terme à terme :

$$\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^1 f_n(x)dx\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\int_0^1\frac{dx}{1+nx}.$$

   .... (0,25)

   Comme

$$\int_0^1\frac{dx}{1+nx}=\frac{1}{n}\int_0^1\frac{d(1+nx)}{1+nx}=\frac{1}{n}\ln(1+nx)|_0^1=\frac{\ln(1+n)}{n},$$

   il vient en définitive

$$\int_0^1 F(x)dx=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln(n+1)}{n^2}.$$

   .... (0,5)