Université d'Oum El Bouaghi
Faculté des Sciences Exactes et des SNV
Département des Mathématiques et Informatique (M&I)

Promotion : 2ème année Licence Informatique
Mardi 17/01/2023
Durée : 1 H 30 mn

Examen - Théorie des graphes -

Exercice n°=1 : (3 pts)

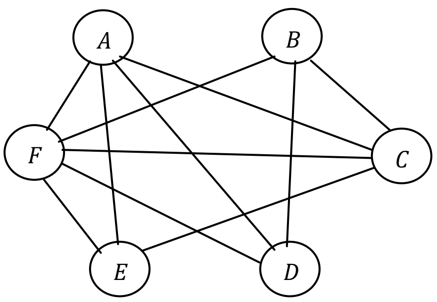
Soit A une matrice associée à un graphe G :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Quelle est le type de la matrice d'adjacence A ? **(1 pt)**
2) Reconstituer le graphe G à partir de la matrice d'incidence A. **(2 pts)**

Exercice n°=2 : (3,5 pts)

Soit le graphe G suivant :



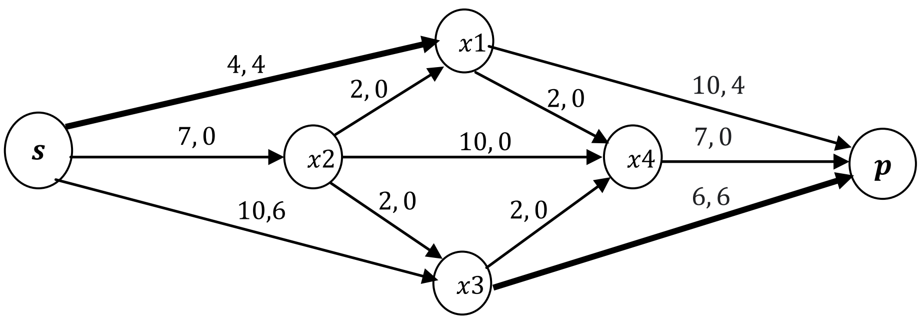
Déterminer **<u>(en justifiant votre réponse)</u>** si le graphe G est un graphe planaire. **(1 pt)**

Si oui,

a. donner sa représentation planaire, **(1 pt)**
b. déterminer le nombre de faces, **(0.5 pt)**
c. et donner le graphe dual G^* correspondant. **(1 pt)**

Exercice n°=3 : (5.75 pts)

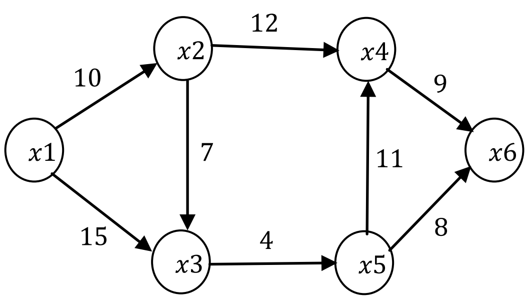
Soit le flot f suivant :



1. Le flot f proposé est-il complet ? Justifier votre réponse. **(0.25 pt + 0.5 pt)**
2. Le flot f proposé est-il réalisable ? Justifier votre réponse. **(0.25 pt + 0.5 pt)**
3. Calculer la valeur du flot $\boldsymbol{\varphi}^?$ de cette itération. **(0.5 pt)**
4. Ce flot f est-il maximal, en justifiant votre réponse ? si non l'augmenter et calculer le flot maximal. **(0.25 pt + 0.5 pt + 3 pts)**

Exercice n°=4 : (4 pts)

Soit le graphe G suivant :



Déterminer un chemin de poids minimal allant du sommet $\boldsymbol{x1}$ à chacun des autres sommets du graphe G en indiquant les différentes étapes.

Tournez la feuille

Nom :……………………………	Prénom :…………………………….	Groupe :………	Note (QCM) :	3,75

Questions de compréhension (QCM) : (3,75 pts)

Cochez la (les) bonne (bonnes) réponse(s) dans ce qui suit :

1) **Parmi les éléments suivants, quels sont ceux absolument nécessaires pour définir un graphe orienté ?**

	Sommets (ou points ou nœuds)
	Arêtes
	Arcs
	Boucles

2) **Une arête est une boucle si :**

	Elle est composée de 3 arêtes
	Elle est de degré 2
	Elle est colinéaire
	Elle relie un sommet à lui-même

3) **Un graphe est qualifié de complet si :**

	Toutes ses arêtes sont colinéaires
	Tous ses sommets sont deux à deux adjacents
	Il est composé de droites
	Il est orienté

4) **La longueur d'une chaîne est :**

	Le nombre d'arêtes qui la composent
	Le nombre de sommets qui la composent
	Le nombre de graphes qui la composent
	Le nombre de matrices qui la composent

5) **Un chemin élémentaire peut passer plusieurs fois par le même arc :**

	Vrai
	Faux

6) **Le degré d'un sommet :**

	Le nombre associé au sommet
	Le nombre de sommets minoré de 1
	Le nombre d'arêtes du graphe
	Le nombre d'arêtes connectées à ce sommet

7) **La somme des degrés des sommets d'un graphe est :**

	Un nombre pair et un nombre impair
	Un nombre pair
	Un nombre entier naturel
	Un nombre impair

8) **Une matrices sommets-arêtes est composée d'éléments dont les valeurs peuvent être :**

	0
	1
	-1
	'Vrai' ou 'Faux'

9) **Une composante fortement connexe d'un graphe est :**

	Un graphe partiel fortement connexe
	Un sous graphe fortement connexe
	Un sous-graphe partiel fortement connexe

10) **Un cocycle $w(A)$ engendré par A est l'ensemble des arcs :**

	incidents extérieurement à A
	incidents extérieurement et intérieurement à A
	incidents intérieurement à A

11) **Le nombre des itérations dans l'algorithme de Kruskal est le nombre des :**

	sommets
	arcs
	arêtes

12) **Un graphe eulérien est un graphe comportant un chemin qui passe par tous les arcs sans répétitions.**

	Vrai
	Faux

13) **Un circuit hamiltonien est un circuit qui passe par tous les sommets sans répétitions.**

	Vrai
	Faux

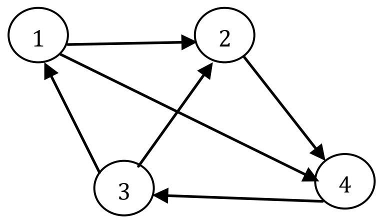
Université d'Oum El Bouaghi
Faculté des Sciences Exactes et des SNV
Département des Mathématiques et Informatique (M&I)

Promotion : 2ème année Licence Informatique
Mardi 17/01/2023
Durée : 1H30

Corrigé Examen - Théorie des graphes -

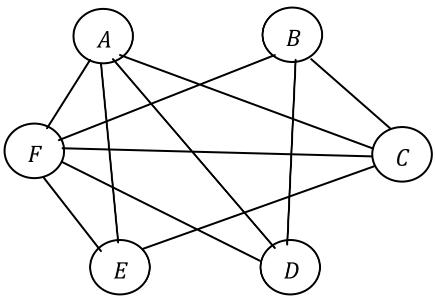
Exercice n°=1 : (3 pts)

1) La matrice d'adjacence A est une matrice ***sommet-arc***. **(1 pt)**
2) Le graphe G associé à la matrice d'incidence A. **(2 pts)**



Exercice n°=2 : (3,5 pts)

Soit le graphe G suivant :

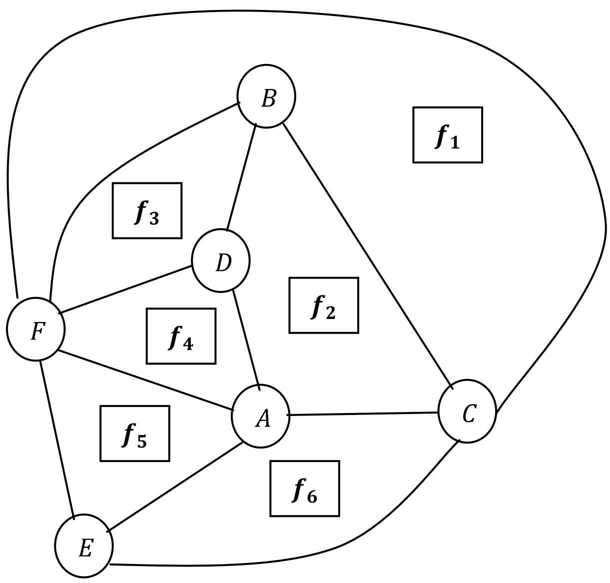


Déterminer **<u>(en justifiant votre réponse)</u>** si le graphe G est un graphe planaire. **(1 pt)**

Si oui,

d. donner sa représentation planaire, **(1 pt)**
e. déterminer le nombre de faces, **(0.5 pt)**
f. et donner le graphe dual G^* correspondant. **(1 pt)**

Représentation planaire topologique du graphe :



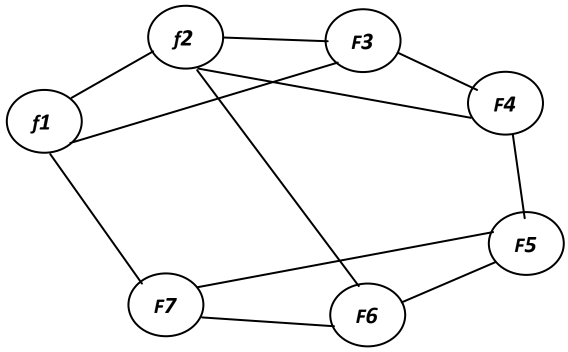
$f_7 = f_\infty$

(1 pt)

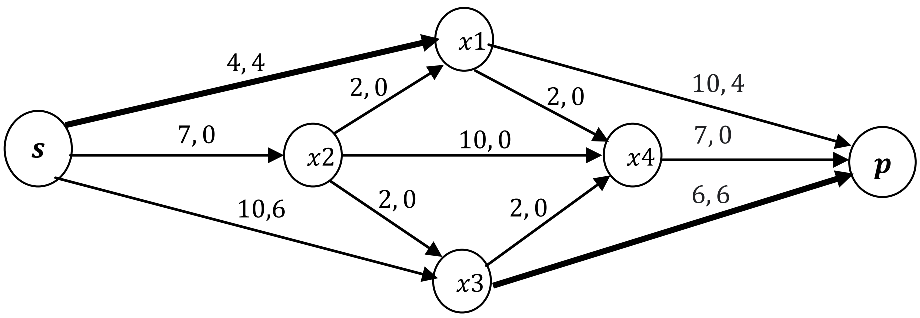
Le graphe est avec triangle, alors on applique la propriété 1 de la formule d'Euler :
$m \leq 3 \times n - 6 \Rightarrow \frac{4+3+4+3+3+5}{2} \leq 3 \times 6 - 6 \Rightarrow \frac{22}{2} \leq 12 \Rightarrow 11 \leq 12 \Rightarrow$ VRAI .
Alors le graphe est planaire. **(1 pt)**
Le nombre de face :

$n - m + f \ = \ 2 \ \Rightarrow f = 2 - n + m \Rightarrow f = 2 - 6 + 11 = \boldsymbol{7\ faces}$ **(0.5 pt)**

Le graphe Dual correspondant : **(1 pt)**



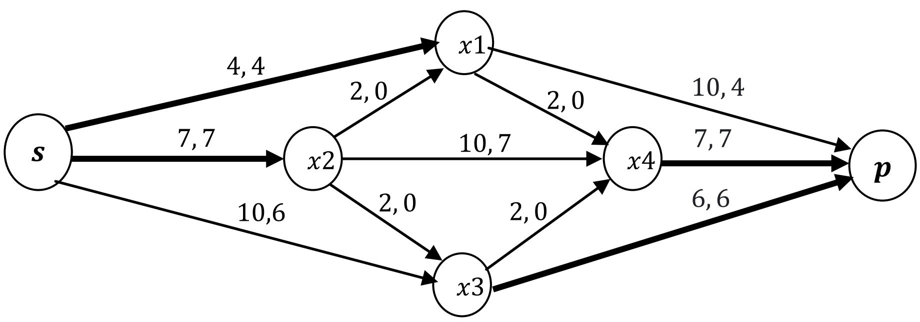
Exercice n°=3 : (5.75 pts)
Soit le flot f suivant :



1. Le flot f proposé n'est pas complet car il existe un chemin allant de la source s au puits p qui n'as pas d'arcs saturés $(s - x2 - x4 - p)$. **(0.25 pt + 0.5 pt)**
2. Le flot f proposé est réalisable car : **(0.25 pt + 0.5 pt)**
   - $\varphi(u_j) \geq 0 \ \ \forall j \in \{1, \dots, m\} \ \Leftrightarrow \ \varphi \geq 0$
   - $\varphi(u_j) \leq \ c(u_j), \forall\, u_j \in U$
3. $\boldsymbol{\varphi}^{?} = \sum_{j \in w^{+}(s)} \varphi_j = \sum_{j \in w^{-}(p)} \varphi_j = 4 + 0 + 6 = 4 + 0 + 6 = \mathbf{10}$ **(0.5 pt)**
4. Ce flot f n'est pas maximal car il existe une chaine augmentante : $A = \{s, x2, x4, p\}$ **(0.25 pt + 0.5 pt**

<u>Calcul du flot maximum</u> **<u>(3 pts)</u>**

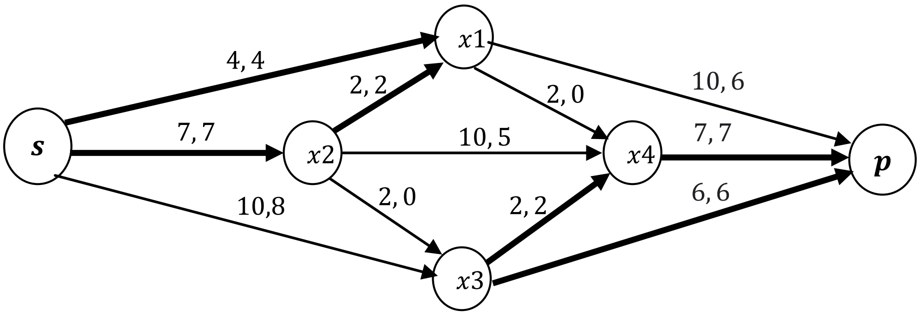
$A = \{s, x2, x4, p\}$
$\varepsilon = min\{7 - 0, 10 - 0, 7 - 0\} = min\{7, 10, 7\} = 7$
$\varphi^{new} = \varphi^{?} + \varepsilon = 10 + 7 = 17$



$A = \{s, x3, x4, x2, x1, p\}$

$\varepsilon = min\{10 - 6, 2 - 0, 7, 2 - 0, 10 - 4\} = min\{4, 2, 7, 2, 6\} = 2$

$\varphi^{new'} = \varphi^{new} + \varepsilon = 17 + 2 = 19$



$A = \{s, x3, STOP\}$

Le sommet p n'est pas marqué, ALORS **terminé**, **le flot est maximum** : $\varphi_{max} = \varphi^{new'}$

$$\varphi_{max} = \sum \left(\varphi(s, x)/x \in \Gamma_R^+(s)\right) = \varphi(s, x1) + \varphi(s, x2) + \varphi(s, x3) = 4 + 7 + 8 = 19$$

ou

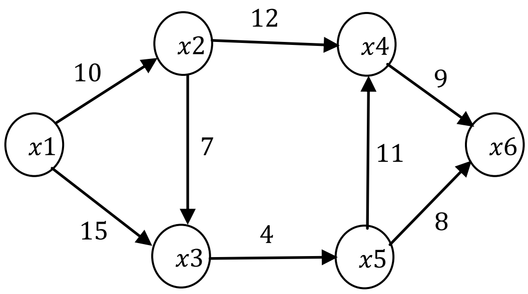
$$\varphi_{max} = \sum \left(\varphi(x, p)/x \in \Gamma_R^-(p)\right) = \varphi(x1, p) + \varphi(x4, p) + \varphi(x3, p) = 6 + 7 + 6 = 19$$

Alors :

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi_{max} = 19}}$$

Exercice n°=4 : (4 pts)

Soit le graphe G suivant :



Déterminer un chemin de poids minimal allant du sommet $\boldsymbol{x1}$ à chacun des autres sommets du graphe G en indiquant les différentes étapes.

		Sommets					
Etapes ($\boldsymbol{k}$)	***D***	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	$\{x1\}$	0	<u>**10**</u>	15	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
2	$\{x1, \boldsymbol{x2}\}$	0	10	<u>**15**</u>	22	$+\infty$	$+\infty$
3	$\{x1, x2, \boldsymbol{x3}\}$	0	10	15	22	<u>**19**</u>	$+\infty$
4	$\{x1, x2, x3, \boldsymbol{x5}\}$	0	10	15	<u>**22**</u>	19	27
5	$\{x1, x2, x3, x5, \boldsymbol{x4}\}$	0	10	15	22	19	<u>**27**</u>
6	$\{x1, x2, x3, x5, x4, \boldsymbol{x6}\}$	0	10	15	22	19	27

Questions de compréhension (QCM) : (3,75 pts)

Cochez la (les) bonne (bonnes) réponse(s) dans ce qui suit :

1) **Parmi les éléments suivants, quels sont ceux absolument nécessaires pour définir un graphe orienté ?**

X	Sommets (ou points ou nœuds)
	Arêtes
X	Arcs
	Boucles

2) **Une arête est une boucle si :**

	Elle est composée de 3 arêtes
	Elle est de degré 2
	Elle est colinéaire
X	Elle relie un sommet à lui-même

3) **Un graphe est qualifié de complet si :**

	Toutes ses arêtes sont colinéaires
X	Tous ses sommets sont deux à deux adjacents
	Il est composé de droites
	Il est orienté

4) **La longueur d'une chaîne est :**

X	Le nombre d'arêtes qui la composent
	Le nombre de sommets qui la composent
	Le nombre de graphes qui la composent
	Le nombre de matrices qui la composent

5) **Un chemin élémentaire peut passer plusieurs fois par le même arc :**

	Vrai
X	Faux

6) **Le degré d'un sommet :**

	Le nombre associé au sommet
	Le nombre de sommets minoré de 1
	Le nombre d'arêtes du graphe
X	Le nombre d'arêtes connectées à ce sommet

7) **La somme des degrés des sommets d'un graphe est :**

	Un nombre pair et un nombre impair
X	Un nombre pair
	Un nombre entier naturel
	Un nombre impair

8) **Une matrices sommets-arêtes est composée d'éléments dont les valeurs peuvent être :**

X	0
X	1
	-1
	'Vrai' ou 'Faux'

9) **Une composante fortement connexe d'un graphe est :**

	Un graphe partiel fortement connexe
X	Un sous graphe fortement connexe
	Un sous-graphe partiel fortement connexe

10) **Un cocycle $w(A)$ engendré par A est l'ensemble des arcs :**

	incidents extérieurement à A
X	incidents extérieurement et intérieurement à A
	incidents intérieurement à A

11) **Le nombre des itérations dans l'algorithme de Kruskal est le nombre des :**

	sommets
	arcs
X	arêtes

12) **Un graphe eulérien est un graphe comportant un chemin qui passe par tous les arcs sans répétitions.**

	Vrai
X	Faux

13) **Un circuit hamiltonien est un circuit qui passe par tous les sommets sans répétitions.**

X	Vrai
	Faux