Questions de cours : (10 points) Comptées sur 11 points

► a (1 point) **1) مبدأ استبعاد باولي** L3PM-PS) الفصل الأولCours (.

► b (1 point) **2) أهمية مبدأ الاستبعاد في الميكانيكا الإحصائية** L3PM-PS) الفصل الأولCours ؟.

► c

(1) الجسيمات التي يمكن تمييزها (MB)

$$W_{MB}(n_1, n_2, ..., n_m, ...) = N! \prod_{m=1}^{\infty} \frac{g_m^{n_m}}{n_m!} \text{ , avec } \sum_{m=1}^{\infty} n_m = N$$

(2) البوزونات (BE)

$$W_{BE}(n_1, n_2, ..., n_m, ...) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(n_m + g_m - 1)!}{n_m!(g_m - 1)!} \text{ , avec } \sum_{m=1}^{\infty} n_m = N$$

(3) الفرميونات (FD)

$$W_{FD}(n_1, n_2, ..., n_m, ...) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{g_m!}{n_m!(g_m - n_m)!} \text{ , avec } \sum_{m=1}^{\infty} n_m = N$$

.

► d $\mathcal{P}(1\ micro\text{-}état) = \frac{1}{\Omega}$ هو عدد حالات النظام Ω

► e اكتب عبارتي دالة التقسيم القانونية ومتوسط الطاقة $\langle E \rangle$.

$$Z = \sum_m e^{-\beta E_m} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \beta}(-\ln Z) = \frac{\sum_m E_m e^{-\beta E_m}}{\sum_m e^{-\beta E_m}} = \sum_m P_m E_m = \langle E \rangle \equiv U \equiv \text{الطاقة الداخلية}$$

► f اكتب عبارات دالة التقسيم الكبرى، ومتوسط الطاقة $\langle E \rangle$ ومتوسط عدد الجسيمات $\langle N \rangle$ في المجموعة القانونية الكبرى.

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_m e^{-\beta E_{mN} - \alpha N}$$

$$\langle E \rangle = \sum_N \sum_m P_{mN} E_{mN} = \frac{\sum_N \sum_m E_{mN} e^{-\beta E_{mN} - \alpha N}}{\sum_N \sum_m e^{-\beta E_{mN} - \alpha}} = -\left[\frac{\partial \ln \Xi}{\partial \beta}\right]_{V,\alpha}$$

$$\langle N \rangle = \sum_N \sum_m P_{mN} N = \frac{\sum_N \sum_m N e^{-\beta E_{mN} - \alpha N}}{\sum_N \sum_m e^{-\beta E_{mN} - \alpha N}} = -\left[\frac{\partial \ln \Xi}{\partial \alpha}\right]_{V,\beta}$$

Exercice : (10 points)

1. أوجد عدد الحالات التي يمكن الوصول إليها والتي تساوي طاقتها E (2 points)

$$W(E) \equiv W_M = \frac{N!}{N_+! N_-!} = \frac{N!}{\left[\frac{1}{2}(N-M)\right]! \left[\frac{1}{2}(N+M)\right]!}$$

2. استنتج عبارة الطاقة بدلالة درجة الحرارة (4 points)

$$S = k_B \log[W_M] = k_B \left\{ N \log N - \left[\tfrac{1}{2}(N-M)\right] \log\left[\tfrac{1}{2}(N-M)\right] - \left[\tfrac{1}{2}(N+M)\right] \log\left[\tfrac{1}{2}(N+M)\right] \right\}$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S}{\partial M}\frac{\partial M}{\partial E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial S}{\partial M} = \frac{1}{2}\frac{k_B}{\varepsilon_0} \log \frac{(N-M)}{(N+M)}$$

$$\frac{N_-}{N_+} = \exp\left(\frac{2\varepsilon_0}{k_B T}\right) \qquad \frac{N_+}{N} = \frac{e^{-\left(\frac{\varepsilon_0}{k_B T}\right)}}{e^{\left(\frac{\varepsilon_0}{k_B T}\right)} + e^{-\left(\frac{\varepsilon_0}{k_B T}\right)}} \qquad E = M\varepsilon_0 = (N_+ - N_-)\varepsilon_0 = -N\varepsilon_0 \tanh\left(\frac{\varepsilon_0}{k_B T}\right)$$

3. أوجد الطاقة الداخلية باستخدام التوزيع القانوني (**distribution canonique**) (4 points)

$$Z_1 = e^{\beta\varepsilon_0} + e^{-\beta\varepsilon_0} = 2\cosh(\beta\varepsilon_0) = 2\cosh\left(\frac{\varepsilon_0}{k_B T}\right) \qquad \boxed{Z_N = \left[2\cosh\left(\frac{\varepsilon_0}{k_B T}\right)\right]^N}$$

et

$$\boxed{F = -k_B T \log(Z_N) \qquad S = -\frac{\partial F}{\partial T} \qquad U = F + TS = -N\varepsilon_0 \tanh\left(\frac{\varepsilon_0}{k_B T}\right)}$$