Correction

Exercice 01 (5pt)

1/ Démonstration par récurrence :

$p(n) = \left(\forall x \in \mathbb{R}/\{1\} : \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right) \forall n \in \mathbb{N}$.

pour $n = 0 \Rightarrow p(0) : x^0 = \frac{1-x}{1-x} = 1$ - - - - (0,5).

On pose que $p(n)$ est vraie et on demontre que $p(n+1)$ est vraie

$p(n+1) : \left(\forall x \in \mathbb{R}/\{1\} : 1+x+x^2+\dots+x^n+x^{n+1} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x} \right)$ - - - (0,5).

on a : $\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \underbrace{1+x+x^2+\dots+x^n}+x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1}$

$= \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$ - - - - (1).

Conclusion : $p(n)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

2) $A = \left\{ \frac{n-1}{n+1} , n \in \mathbb{N} \right\}$.

on a : $\frac{n-1}{n+1} = \frac{n-1+1-1}{n+1} = \frac{n+1-2}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$ - - - (1).

on a : la fonction $1 - \frac{2}{n+1}$ est croissante alors :

pour $n = 0 \Rightarrow 1 - \frac{2}{n+1} = 1 - \frac{2}{1} = -1$ alors :

$\operatorname{Inf}(A) = -1 \in A \Rightarrow \operatorname{Min}(A) = -1$ - - - - - (1)

pour $n \to +\infty \Rightarrow 1 - \frac{2}{n+1} \to 1$ donc :

$\operatorname{Sup}(A) = 1 \notin A \Rightarrow$ Max : n'existe pas - - - (1)

Exercice 2 : (6,5 pt)

*) $D_f =]-\infty, -\frac{\pi}{2}] \cup]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \cup]\frac{\pi}{2}, +\infty[= \mathbb{R}$ ... (0,5).

1) On a : la fonction $f(x) = -2x$ si $x \in]-\infty, -\frac{\pi}{2}]$ alors définie et continue sur ce intervalle.

(0,5)

$f(x) = a\sin(x) + b$ si $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc définie et continue

$f(x) = \cos(x)$ si $x \in]\frac{\pi}{2}, +\infty[$ aussi définie et continue.

d'où il reste l'étude de la continuité en $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

on a : $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} a\sin(x) + b = f(-\frac{\pi}{2})$. ..... (1,5).

$f(-\frac{\pi}{2}) = -2(-\frac{\pi}{2}) = \pi$ d'où $b - a = \pi$ ... (*)

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos(x) = f(\frac{\pi}{2})$.

– – – (1,5)

$f(\frac{\pi}{2}) = a\sin(\frac{\pi}{2}) + b = a + b$ d'où $a + b = 0$ ... (**).

$\begin{cases} b - a = \pi \\ a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{\pi}{2} \\ b = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ... (0,5).

II). $\mathrm{Arccos}(\cos(5\pi/4)) = \frac{5\pi}{4}$ car.

$\frac{5\pi}{4} \in [0, \pi]$ et la fonction $\cos(x)$ est paire c-à-d ... (1)

$\cos(-\frac{5\pi}{4}) = \cos(5\pi/4)$ et on a : $\mathrm{Arccos}(\cos(x)) = x$ si $x \in [0, \pi]$

donc $\mathrm{Arccos}(\cos(-\frac{5\pi}{4})) = \mathrm{Arccos}(\cos(\frac{5\pi}{4})) = \frac{5\pi}{4}$ ... (1).

Exercice 03:

1) Montrons que F est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$

*) $F \neq \phi$ car $0_{\mathbb{R}^3} \in F$ car $(0,0,0) \in F$.

$0+0+0=0$ 0,5

**) $\forall u.v \in F, \forall \alpha.\beta \in \mathbb{R} : \alpha u + \beta v \in F$.

on a: $(\alpha u + \beta v) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$

donc: $(\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2) =$ . . . 1 .

$\alpha(x_1 + y_1 + z_1) + \beta(x_2 + y_2 + z_2) = \alpha.0 + \beta.0 = 0$.

2) La famille génératrice:

on a: $z = -(x+y)$ donc.

$F = \{(x.y.z) \in \mathbb{R}^3 : z = -x-y\}$.

$F = \{(x, y, -x-y), (x.y) \in \mathbb{R}^2\}$.

$= \{(x, 0, -x) + (0, y, -y), (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

$= \{x(1,0,-1) + y(0,1,-1) ; (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

$F = \mathrm{Vect}((1,0,-1), (0,1,-1))$.

3:

3) Est ce que $\{u . v\}$ forme une base de F ?

on a : pour que $\{u . v\}$ forme une base il doit être libre donc : $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in \mathbb{R}^3$ on a :

$\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0 \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_1 - \lambda_2) = 0$ 1,5

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ donc $\{u . v\}$ libres

alors $\{u . v\}$ base de F.

Exercice 4:

1) Montrons que f est lineaire :

$\forall \alpha . \beta \in \mathbb{R}$: $\forall u . v \in \mathbb{R}^3$: $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$.

$f(\alpha u + \beta v) = f(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$.

$= (\alpha x_1 + \beta x_2 - \alpha y_1 - \beta y_2 + 3\alpha z_1 + 3\beta z_2, 2\alpha x_1 + 2\beta x_2)$ . . . 1.

$= \alpha(x_1 - y_1 + 3z_1, 2x_1) + \beta(x_2 - y_2 + 3z_2, 2x_2)$.

$= \alpha f(u) + \beta f(v)$

$Ker(f) = \{\forall u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}\} = \{(x - y + 3z, 2x) = (0.0)\}$.

$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3z \end{cases}$ alors $Ker(f) = \{(0, 3z, z), z \in \mathbb{R}\}$.

$Ker(f) = \{z(0,3,1), z \in \mathbb{R}\}$. . . 1,5

$Ker(f) = vect(0,3,1)$

$\mathrm{Im}(f)$:

1,5 .

on a :

$$(x-y+3z,\ 2x) = (x,2x)+(-y,0)+(3z,0).$$

$$= x(1,2)+y(-1,0)+z(3,0).$$

alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}\big((1,2),(-1,0),(3,0)\big)$