Université Larbi Ben M'Hidi, Oum El Bouaghi
Faculté des Sciences Exactes, Science de la Nature et de la Vie
Département Mathématiques et informatique

Année 2022/2023
10/01/2023
Durée: 1 h 30

Analyse numérique 1

1. Citez le théorème qui fournira la condition suffisante pour la convergence de la méthode Newton-Raphson

2. Montrer que la fonction $f(x) = \sin x - 3x + 1$ satisfait les conditions de convergence dans l'intervalle $(0, 1)$.

3. Utilisez de méthode Newton–Raphson pour calculer la valeur de $\sqrt[3]{77}$.

1. Utilisez les nombres nœuds $x_0 = 2$, $x_1 = 2.75$ et $x_2 = 4$ pour trouver le polynôme d'interpolation de Lagrange pour $f(x) = 1/x$.

2. Utilisez ce polynôme pour approximer $f(3) = 1/3$.

On se propose de calculer l'intégrale définie :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 6x + 10} dx.$$

1. Ecrire un programme qui calcule cette intégrale en utilisant la méthode des trapèzes et de 1/3 Simpson avec $n = 4$.

2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale et comparer les résultats de chaque méthode, conclure.

Bon courage

Prof. Abdelfatah Bouziani

Solution d'Analyse numérique 1

Exercice 1.

1. Le théorème suivant fournit la condition suffisante pour la convergence de la méthode Newton-Raphson.

Theoréme: Soit la fonction $f(x)$ une fonction deux fois continûment différentiable sur l'intervalle $[a,b]$, et satisfait aux conditions suivantes:

i) $f(a)\,f(b) < 0$.

ii) $f'(x) \neq 0, \quad \forall x \in [a,b]$.

iii) $f''(x) < 0$ ou $f''(x) > 0$ pour chaque point de l'intervalle $[a,b]$.

iv) $\left|\dfrac{f(a)}{f'(a)}\right| < b-a$ et $\left|\dfrac{f(b)}{f'(b)}\right| < b-a$.

Alors la méthode de Newton-Raphson convergera vers la racine unique de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a,b]$ pour toute approximation initiale dans l'intervalle $[a,b]$.

2. Soit $f(x) = \sin x - 3x + 1,\ x \in (0,1)$.

Les quatre conditions de convergence de la méthode Newton–Raphson sont:

i) $f(0)\,f(1) < 0$.

ii) $f'(x) = \cos x - 3 \neq 0, \quad \forall x \in [0,1]$.

iii) $f''(x) = -\sin x < 0$ pour chaque point de l'intervalle $[0,1]$.

iv) $\left|\dfrac{f(0)}{f'(0)}\right| = \dfrac{1}{2} < 1$ et $\left|\dfrac{f(1)}{f'(1)}\right| = \left|\dfrac{\sin 1 - 2}{\cos 1 - 3}\right| < 1$.

Par conséquent, la méthode Newton – Raphson convergera vers la racine pour tout choix d'approximation initiale dans l'intervalle $(0,1)$.

3. Soit $x = \sqrt[3]{77}$, alors

$$f(x) = x^3 - 77 = 0.$$

Le but est de calculer la racine de cette équation en utilisant la méthode de Newton-Raphson. La méthode de Newton-Raphson est donnée par

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= x_n - \frac{x_n^3 - 77}{3x_n^2} = x_n - \frac{x_n^3}{3x_n^2} + \frac{77}{3x_n^2} = \frac{2}{3}x_n + \frac{77}{3x_n^2} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{77}{x_n^2}\right). \end{aligned}$$

Soit l'approximation initiale $x_0 = 4.25$. En utilisant la formule itérative mentionnée ci-dessus, nous avons

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3}\left(2x_0 + \frac{77}{x_0^2}\right) = \frac{1}{3}\left(2 \times 4.25 + \frac{77}{(4.25)^2}\right) = 4.254325 \\ x_2 &= \frac{1}{3}\left(2x_1 + \frac{77}{x_1^2}\right) = \frac{1}{3}\left(2 \times 4.254325 + \frac{77}{(4.254325)^2}\right) = 4.2543250 \\ x_2 &= \frac{1}{3}\left(2x_2 + \frac{77}{x_2^2}\right) = \frac{1}{3}\left(2 \times 4.2543250 + \frac{77}{(4.2543250)^2}\right) = 4.2543250. \end{aligned}$$

Exercice 2.

Nous déterminons d'abord les polynômes de coefficients $L_0(x)$, $L_1(x)$ et $L_2(x)$, ils sont

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-2.75)(x-4)}{(2-2.5)(2-4)} = \frac{2}{3}(x-2.75)(x-4) \\
L_1(x) &= \frac{(x-2)(x-4)}{(2.75-2)(2.75-4)} = -\frac{16}{15}(x-2)(x-4)
\end{aligned}$$

et

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-2.75)}{(4-2)(4-2.5)} = \frac{2}{5}(x-2)(x-2.75)$$

Également

$$f(2) = 1/2, \qquad f(2.75) = 4/11, \qquad f(4) = 1/4,$$

Nous avons la table de valeurs suivantes:

x	2	2.75	4
$f(x)$	1/2	4/11	1/4

Alors

$$\begin{aligned}
P(x) &= \sum_{k=0}^{2} f(x_k) L_k(x) \\
&= \frac{1}{3}(x-2.75)(x-4) - \frac{64}{165}(x-2)(x-4) + \frac{1}{10}(x-2)(x-2.75) \\
&= \frac{1}{10}x^2 - \frac{35}{88}x + \frac{49}{44}.
\end{aligned}$$

(b) Une approximation de $f(3) = 1/3$ est

$$f(3) \approx P(3) = \frac{9}{22} - \frac{105}{88} + \frac{49}{44} = \frac{29}{88} \approx 0.32955.$$

Exercice 3.

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2+6x+10} dx.$$

1. **La règle trapézoïdale composée**

function $I = TrapComp(\frac{1}{x^2+6x+10}, 0, 1, 4)$
%
$h = 1/4; x = 0 : \frac{1}{4} : 1;$
$y = \frac{1}{x^2+6x+10};$
$I = (y(1) + 2 * sum(y(2 : end-1)) + y(end)) * h/2;$

2.a On a $N = 4$: $h = 0.25$. Les nœuds sont 0.0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0.

Nous avons la table de valeurs suivantes:

x	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0
$f(x)$	0.1	0.08649	0.07547	0.06639	0.05882

On calcule maintenant la valeur de l'intégrale

$$\begin{aligned} N &= 4: \qquad I = \frac{h}{2}\left[f(0.0) + 2\left\{f(0.25) + f(0.5) + f(0.75)\right\} + f(1.0)\right] \\ &\qquad\qquad = \frac{0.25}{2}\left[0.1 + 2\left\{0.08649 + 0.07547 + 0.06639\right\} + 0.05882\right] \\ &\qquad\qquad = 0.07694. \end{aligned}$$

La valeur exacte de l'intégrale est

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(x+3)^2 + 1} = \left[\tan^{-1}(x+3)\right]_0^1 = \tan^{-1}(4) - \tan^{-1}(3) = 0.07677.$$

L'erreur dans la solution est la suivante :

$$|Exacte - I| = |0.07677 - 0.07694| = 0.00017.$$

2.b Règle 1/3 de Simpson composite

function $I = Simpson\left(\frac{1}{x^2+6x+10}, 0, 1, 4\right)$
%
$h = 1/4; x = 0 : \frac{1}{4} : 1; I = 0;$
$f(x) = \frac{1}{x^2+6x+10};$
$for\ i = 1 : 2 : n,$
$I = I + f(x(i)) + 4 * f(x(i+1)) + f(x(i+2));$
end
$I = (h/3) * I;$

Maintenant, nous calculons la valeur de l'intégrale :

$$\begin{aligned} n = 2N = 4: \qquad I &= \frac{h}{3}\left[f(0.0) + 4\left\{f(0.25) + f(0.75)\right\} + 2f(0.5) + f(1.0)\right] \\ &= \frac{0.25}{3}\left[0.1 + 4\left\{0.08649 + 0.06639\right\} + 2(0.07547) + 0.05882\right] \\ &= 0.07677. \end{aligned}$$

L'erreur dans la solution est la suivante :

$$|Exacte - I| = |0.07677 - 0.07677| = 0.00000.$$

La méthode de Simpson est plus précise que la méthode des trapèzes.