Questions de cours : (14 points) → comptées sur 16 points !

a ▶ *Démontrer* qu'en mécanique quantique les particules identiques sont ***indiscernables***.

Cours (الفصل الأول M2M-TPS) page 7 : 1) مبدأ استبعاد باولي. (1 point)

b ▶ *Pourquoi* deux fermions ne peuvent pas occuper un même état quantique ?

Cours (الفصل الأول M2M-TPS) page 7 : 2) أهمية مبدأ الاستبعاد في الميكانيكا الإحصائية. (1 point)

c ▶ *Que vaut le poids thermodynamique* **W{n_1, n_2, …, n_m, …}** dans les 3 cas suivants :

1) Particules discernables. (1 point) : $W_{MB}(n_1, n_2, \ldots, n_m, \ldots) = N! \prod_{m=1}^{\infty} \frac{g_m^{n_m}}{n_m!}$, avec $\sum_{m=1}^{\infty} n_m = N$

2) Les particules sont des bosons. (1 point)

$$W_{BE}(n_1, n_2, \ldots, n_m, \ldots) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(n_m + g_m - 1)!}{n_m!(g_m - 1)!} , \quad \text{avec} \quad \sum_{m=1}^{\infty} n_m = N$$

3) Les particules sont des fermions. (1 point)

$$W_{FD}(n_1, n_2, \ldots, n_m, \ldots) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{g_m!}{n_m!(g_m - n_m)!} , \quad \text{avec} \quad \sum_{m=1}^{\infty} n_m = N$$

d ▶ *Quelle est la probabilité de trouver le système*

1) dans un de ses microétats dans le cas de l'ensemble microcanonique ? (1 point)

Postulat d'équiprobabilité (مسلمة تساوي الاحتمالات) : $\mathcal{P}(1 \text{ micro-état}) = \frac{1}{\Omega}$ (هو عدد حالات النظام Ω)

2) dans un état macroscopique avec une énergie E_m dans le cas de l'ensemble canonique ? (1 point)

$$P_m = \frac{g_m e^{-\beta E_m}}{Z}$$

3) dans un état macroscopique avec un nombre de particules N et une énergie E_m dans le cas de l'ensemble grand-canonique ? (1 point)

$$P_{mN} = \frac{e^{-\beta E_{mN} - \alpha N}}{\Xi}$$

e ▶ ***Quelles sont les expressions*** *de la fonction de partition canonique et de l'énergie moyenne* $\langle E \rangle$? (2 points)

$$Z = \sum_m e^{-\beta E_m} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \beta}(-\ln Z) = \frac{\sum_m E_m e^{-\beta E_m}}{\sum_m e^{-\beta E_m}} = \sum_m P_m E_m = \langle E \rangle \equiv U \equiv \text{الطاقة الداخلية}$$

f ▶ **Quelles *sont les expressions*** *de la grande fonction de partition, de l'énergie moyenne* $\langle E \rangle$ *et du nombre moyen de particules* $\langle N \rangle$ *dans l'ensemble grand-canonique* ? (2 points)

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_m e^{-\beta E_{mN} - \alpha N}$$

$$\langle E \rangle = \sum_N \sum_m P_{mN} E_{mN} = \frac{\sum_N \sum_m E_{mN} e^{-\beta E_{mN} - \alpha N}}{\sum_N \sum_m e^{-\beta E_{mN} - \alpha N}} = -\left[\frac{\partial \ln \Xi}{\partial \beta}\right]_{V,\alpha}$$

$$\langle N \rangle = \sum_N \sum_m P_{mN} N = \frac{\sum_N \sum_m N e^{-\beta E_{mN} - \alpha N}}{\sum_N \sum_m e^{-\beta E_{mN} - \alpha N}} = -\left[\frac{\partial \ln \Xi}{\partial \alpha}\right]_{V,\beta}$$

g ▶ *Démontrer* qu'en mécanique quantique, **à la limite des hautes températures**, on peut ramener l'étude du système de N-particules à l'étude de N systèmes à 1-particule. (1 point)

Cours (الفصل الرابع M2M-TPS) page 2 : غاز بولتزمان Le gaz de Boltzmann. (1 point)

في درجات الحرارة المرتفعة، يصبح عدد المستويات المتاحة كبيرا جدا مما يجعل الـ N جزيئات تتوزع على المستويات المختلفة. وبالتالي فإن أعداد الاحتلال n_m يهيمن عليها 0 أو 1. التأثيرات الكمومية لا تظهر.

Exercice : (6 points)

Voir correction de l'exercice 7

1. *Trouver* le nombre d'états accessibles dont l'énergie est égale à E. (2 points)

$$E = M E = M\varepsilon_0 = (N_+ - N_-)\varepsilon_0 \text{ avec } N = N_+ + N_- \text{ et donc } N = N_+ + N_-$$

d'où : $N_+ = ½(N + M)$, $N_- = ½(N - M)$

le nombre de configurations ou microétats avec l'énergie $E = M\varepsilon_0$ est :

$$W(E) \equiv W_M = \frac{N\,!}{N_+!\,N_-\,!} = \frac{N\,!}{\left[\frac{1}{2}(N-M)\right]!\left[\frac{1}{2}(N+M)\right]!}$$

L'entropie du système est :

$$S = k_B \,\boldsymbol{log}[W_M] = k_B\left\{N \,\boldsymbol{log}\, N - \left[\tfrac{1}{2}(N-M)\right]\boldsymbol{log}\left[\tfrac{1}{2}(N-M)\right] - \left[\tfrac{1}{2}(N+M)\right]\boldsymbol{log}\left[\tfrac{1}{2}(N+M)\right]\right\}$$

2. *Déduire* l'expression de l'énergie en fonction de la température. (2 points)

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S}{\partial M}\frac{\partial M}{\partial E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial S}{\partial M} = \frac{1}{2}\frac{k_B}{\varepsilon_0}\,\boldsymbol{log}\frac{(N-M)}{(N+M)}$$

$$\frac{2\varepsilon_0}{k_B T} = \boldsymbol{log}\frac{(N-M)}{(N+M)} = \boldsymbol{log}\frac{(N_-)}{(N_+)} \quad\Rightarrow\quad \frac{N_-}{N_+} = \boldsymbol{exp}\left(\frac{2\varepsilon_0}{k_B T}\right)$$

$$\frac{N_-}{N} = \frac{e^{\left(\frac{\varepsilon_0}{k_B T}\right)}}{e^{\left(\frac{\varepsilon_0}{k_B T}\right)} + e^{-\left(\frac{\varepsilon_0}{k_B T}\right)}}\,, \qquad \frac{N_+}{N} = \frac{e^{-\left(\frac{\varepsilon_0}{k_B T}\right)}}{e^{\left(\frac{\varepsilon_0}{k_B T}\right)} + e^{-\left(\frac{\varepsilon_0}{k_B T}\right)}}$$

d'où : $E = M\varepsilon_0 = (N_+ - N_-)\varepsilon_0 = -N\varepsilon_0 \tanh\left(\frac{\varepsilon_0}{k_B T}\right)$

3. *Trouver* l'énergie interne à l'aide de la distribution canonique. (2 points)

$$Z_1 = e^{\beta\varepsilon_0} + e^{-\beta\varepsilon_0} = 2\cosh(\beta\varepsilon_0) = 2\cosh\left(\frac{\varepsilon_0}{k_B T}\right) \quad \text{et} \quad \boxed{Z_N = \left[2\cosh\left(\frac{\varepsilon_0}{k_B T}\right)\right]^N}$$

$$\boxed{F = -k_B T \log(Z_N) = -N k_B T \log\left\{2\cosh\left(\frac{\varepsilon_0}{k_B T}\right)\right\}}$$

$$\boxed{S = -\frac{\partial F}{\partial T} = -N k_B\left\{\log\left[2\cosh\left(\frac{\varepsilon_0}{k_B T}\right)\right] - \frac{\varepsilon_0}{k_B T}\tanh\left(\frac{\varepsilon_0}{k_B T}\right)\right\}}$$

$$\boxed{U = F + TS = -N\varepsilon_0 \tanh\left(\frac{\varepsilon_0}{k_B T}\right)}$$