Université Larbi Ben M'hidi Om El-Bouaghi
Département MI
Deuxième année Master : Mathématiques appliquées 2019/2020

Corrigé type de l'examen en "Théorie variationnelle des équations elliptiques"

Exercice 1 *[06 points]*

1) *Soit $u \in H^1(\Omega)$ solution de (1), alors $(-\Delta u + \lambda u) \in H^{-1}(\Omega)$ et $-\Delta u + \lambda u = f$ dans $H^{-1}(\Omega)$, donc*

$$\underbrace{\langle f, v\rangle}_{\ell(v)} = -\int_\Omega \Delta u v dx + \lambda \int_\Omega u v dx = \underbrace{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \lambda \int_\Omega u v dx}_{a(u,v)}, \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

puisque $\frac{\partial u}{\partial u_j} \in L_2(\Omega), j = 1, 2, ..., n$. La formulation variationnelle est

$$\text{"torver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que } a(u,v) = \ell(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega))\text{"}.$$

2) *On montre par l'inégalité de Cauchy-Shwartz que $|a(u,v)| \leq \max(1, |\lambda|)\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}$, danc $a(\cdot,\cdot)$ est contuniue sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.*
Examinons maintenant la coercivité de $a(\cdot,\cdot)$, soit $u \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$a(u,u) = \||\nabla u|\|^2_{L_2(\Omega)} + \lambda\|u\|^2_{L_2(\Omega)}. \qquad (*)$$

Par l'inégalité de Poincaré, il existe une constante $C_\Omega > 0$ tell que $\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \leq C_\Omega\||\nabla u|\|^2_{L_2(\Omega)}$, donc $\lambda\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \geq \lambda C_\Omega\||\nabla u|\|^2_{L_2(\Omega)}$, par $(*)$ et le fait que $u \mapsto \||\nabla u|\|^2_{L_2(\Omega)}$ définit une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalante à la norme induite par celle de $H^1(\Omega)$ il vient

$$a(u,u) \geq (1 + \lambda C_\Omega)\||\nabla u|\|^2_{L_2(\Omega)} \geq C(1 + \lambda C_\Omega)\|u\|^2_{H^1(\Omega)},$$

pour $\lambda > -1/C_\Omega$, d'où la coercivité de $a(\cdot,\cdot)$.
Par définition de $H^{-1}(\Omega)$, ℓ est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$. Donc par le théorème de Lax-Miligram, le problème (1) admet une solution faible unique $w \in H_0^1(\Omega)$.

3) *Il s'agit de montrer que w vérifie (1) et $w \in H^2(\Omega)$, on a $a(w,v) = \ell(v), \forall v \in H_0^1(\Omega)$, en particulier $a(w,v) = \ell(v), \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$, donc par la formule de Green $\langle -\Delta w + \lambda w, v\rangle = \langle f, v\rangle, \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$, donc $-\Delta w + \lambda w = f$ p.p. sur Ω, ce qui imlique $\Delta w = \lambda w - f \in L_2(\Omega)$ donc $w \in H^2(\Omega)$. Comme $w \in H_0^1(\Omega)$ alors $w = 0$ sur $\partial\Omega$, en conclusion w est une solution de (1) et $w \in H^2(\Omega)$.*

4) *Supposons $f \in H^m(\Omega)$ et Ω de classe C^{m+2} alors $w \in H^{m+2}(\Omega)$ (voir le cour), si $m > n/2$ alors $H^{m+2}(\Omega) \hookrightarrow C^2(\overline{\Omega})$ donc w est une solution classique de (1).*

Exercice 2 1) *a) Multiplions l'équation $-(p(x)u')' + u(x) = f(x)$ par une fonction $v \in H^1(]0,1[)$ et intégrons par partie, nous obtenons la formulation variationnelle*

$$\underbrace{\int_0^1 pu'v'dx + \int_0^1 uvdx}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_0^1 fvdx}_{\ell(v)} \qquad \forall v \in H^1(]0,1[), \qquad (fv)$$

Pour tout $u, v \in H^1(]0,1[)$*, on a*
$|a(u,v)| \leq \|p\|_{L_\infty(]0,1)}\|u'\|_{L_2(]0,1[}\|v'\|_{L_2(]0,1[}+\|u\|_{L_2(]0,1[}\|v\|_{L_2(]0,1[}| \leq \|p\|_{L_\infty(]0,1)}|\|u\|_{H^1(]0,1[}\|v\|_{H^1(]0,1[}$.
$a(u,u) \geq \alpha\|u'\|^2_{L_2(]0,1[)} + \|u\|^2_{L_2(]0,1[)} \geq \max(\alpha, 1)\|u\|^2_{H^1(]0,1[)}$.
$\|\ell(v)\| \leq \|f\|_{L_2(]0,1[}\|v\|_{L_2(]0,1[} \leq C\|v\|_{H^1(]0,1[}$ *(rappellons que* $L_\infty(]0,1[) \subseteq L_2(]0,1[)$*).*
D'après le théorème de Lax-Miligram il existe $w \in H^1(]0,1[)$ *solution de* (fv)*, donc* (2) *admet un solution faible unique* $w \in H^1(]0,1()$.
b) En prennant $w_+ \in H^1(]0,1[)$ *comme fonction test dans* (fv) *on obtient*

$$\underbrace{\int_0^1 (w')^2 p 1_{\{w\geq 0\}}dx + \int_0^1 w_+^2 dx}_{\geq 0 (car\ p>0\ p.p.\ sur\ ]0,1[)} = \underbrace{\int_0^1 f w_+ dx}_{\leq 0},$$

donc $\displaystyle\int_0^1 w_+^2 dx = 0$ *ce qui implique* $w_+ = 0$ *p.p. sur* $]0,1[$ *d'où* $w \leq 0$ *sur* $[0,1]$ *(car* $w \in H^1(]0,1[) \hookrightarrow C([0,1])$.
c)Soit $k = \|f\|_{L_\infty(]0,1()}$. *On prend* $(u-k)_+ \in H^1(]0,1[)$ *comme fonction test il vient.*

$$\underbrace{\int_0^1 (w')^2 q 1_{\{w>k\}}dx + \int_0^1 (w-k)_+^2 dx}_{\geq 0} = \underbrace{\int_0^1 (f-k)(w-k)_+\, dx}_{\leq 0}$$

$\displaystyle\int_0^1 (w-k)_+^2 dx_{\geq 0} = 0$ *donc* $(w-k)_+ = 0$*, d'où* $w \leq \|f\|_{L_\infty(]0,1[)}$.
la fonction $-w$ *vérifie*

$$\int_0^1 p(-w)'v'dx + \int_0^1 (-w)vdx = \int_0^1 (-f)vdx \qquad \forall v \in H^1(]0,1[),$$

donc $-w \leq \|-f\|_{L_\infty(]0,1[)}$*, ce qui donc* $-\|f\|_{L_\infty(]0,1[)} \leq w \leq \|f\|_{L_\infty(]0,1[)}$*, d'où le résultat voulu.*
2) *a) on a* $|S(v)| \leq \max(\|p+q\|_{L_\infty(]0,1[)}\|w\|_{H^1(]0,1[)}\|v\|_{H^1(]0,1[)} \leq C\|v\|_{H^1(]0,1[)}, \forall v \in H^1(]0,1[)$.
donc $S \in (H^1(]0,1))'$.
b) On a vu dans les question 1)*a) et* 2)*a) que* $\displaystyle\int_0^1 qu'v'dx + \int_0^1 uvdx$ *définit une forme bilinéaire continue sur* $(H^1(]0,1[)^2$ *et coercive, et* S *est une forme linéaire continue sur* $H^1(]0,1[)$ *donc par le théorème de Lax-Miligram, il exite* $u \in H^1(]0,1)$ *unique vérifiant* (3).
3)*a)* u *solution de* (3) *et* $q = \eta p$ *impliquent*

$$\int_0^1 qu'v'dx + \int_0^1 uv = \int_0^1 (1+\eta)pw'v'dx + \int_0^1 wvdx, \qquad \forall v \in H^1(]0,1[),$$

mais w *est solution de* (2)*, donc*

$$\int_0^1 \frac{\eta p}{1+\eta}u'v'dx + \frac{1}{1+\eta}\int_0^1 uv = \int_0^1 (f - \frac{\eta}{1+\eta}w)vdx, \qquad \forall v \in H^1(]0,1[),$$

d'où l'expression cherchée, avec $\varphi = \dfrac{\eta p}{1+\eta}$ *et* $g = f - \dfrac{\eta}{1+\eta}w$.
b) Soit $k = (1+\eta)\|g\|_{L_\infty}$*, on prend* $(u-k)_+ \in H^1(]0,1[)$ *comme fonction test dans* (4) *il vient*

$$\underbrace{\int_0^1 (u')^2 \varphi 1_{\{u>k\}}dx + \frac{1}{1+\eta}\int_0^1 ((u-k)_+)^2}_{\geq 0} = \underbrace{\int_0^1 (g - \frac{k}{1+\eta})(u-k)_+ dx}_{\leq 0},$$

donc $(u-k)_+ = 0$*, ce qui implique* $u \leq k = (1+\eta)\|g\|_{L_\infty(]0,1[)}$.
Remarquons que $-u$ *vérifie*

$$\int_0^1 \frac{\eta p}{1+\eta}(-u)'v'dx + \frac{1}{1+\eta}\int_0^1 (-)uv = \int_0^1 (-g)vdx, \qquad \forall v \in H^1(]0,1[),$$

donc $-u \leq (1+\eta\|-g\|_{L_\infty(]0,1[)})$*, d'où* $(1+\eta)\|g\|_{L_\infty(]0,1[)}) \leq u \leq (1+\eta)\|g\|_{L_\infty(]0,1[)})$*, donc*

$$\|u\| \leq (1+\eta)\|g\|_{L_\infty(]0,1[)} = \|(1+\eta)f - \eta w\|_{L_\infty(]0,1[)},$$

comme $\|w\|_{L_\infty(]0,1[)} \leq \|f\|_{L_\infty(]0,1[)}$ *(question* $1)c)$*) alors*

$$\|u\| \leq (1+\eta)\|g\|_{L_\infty(]0,1[)} \leq \|(1+\eta)\|f\|_{L_\infty(]0,1[)} + \eta\|w\|_{L_\infty(]0,1[)} \leq (1+2\eta)\|w\|_{L_\infty(]0,1[)}.$$