Université Larbi Ben M'hidi Om El-Bouaghi
Département MI
Deuxième année Master : Mathématiques appliquées 2019/2020

Examen en "Théorie variationnelle des équations elliptiques"

Exercice 1 ***[08 points]*** *Soient* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *de classe* C^2, $f \in H^{-1}(\Omega)$ *et* λ *un nombre réel négatif, on considère le problème*

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f & sur \quad \Omega, \\ u = 0 & sur \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

1) *Etablir une formulation variationnelle du problème* (1).
2) *Déterminer une condition sur* λ *pour que le problème* (1) *admet une solution faible unique* w *(dans la suite, on suppose que* λ *vérifie cette condition).*
3) *Supposons que* $f \in L_2(\Omega)$, *montrer que* w *est une solution forte de* (1).
4) *Sur quelles hypothèses(sur* f *et* Ω*),* w *soit solution classique de* (1).

Exercice 2 ***[12 points]***
On admet que :
$h \in H^1(]0,1[) \Rightarrow \left[(h-k)_+ \in H^1(]0,1[) \textbf{ et } (h-k)'_+ = h'\mathbf{1}_{\{u>k\}} \textbf{ pour tout } k > 0\right]$**.**
Soient p, q *et* f *trois fonctions appartenant à* $L_\infty(]0,1[)$ *telles que* $p(x), q(x) \geq \alpha > 0$ *pour presque tout* $x \in]0,1[$.
1) *On considère le prolème*

$$\begin{cases} -(pu')' + u = f & sur \quad]0,1[\\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

a)*Etablir une formulation variationnelle de problème* (2) *et montrer qui'il admet une solution faible unique* w.
b)*Montrer que : (*$f \leq 0$ *p.p. sur* $]0,1[$) $\Rightarrow$ ($w \leq 0$ *sur* $]0,1[$*).*
c) *Montrer que* $\|w\|_{L_\infty(]0,1[)} \leq \|f\|_{L_\infty(]0,1[)}$.
2) *On pose* $S(v) = \int_0^1 (p+q)w'v'dx + \int_0^1 wvdx$ *(où* w *est l'unique solution faible de* (2)*).*
Montrer que
a)$S \in (H^1(]0,1[))'$.
b) *Il existe un seule* $u \in H^1(]0,1[)$ *telle que*

$$\int_0^1 qu'v'dx + \int_0^1 uv = \int_0^1 (p+q)w'v'dx + \int_0^1 wvdx, \qquad \forall v \in H^1(]0,1[). \tag{3}$$

3) *On suppose qu'il existe un réel* $\eta > 0$ *tel que* $q = \eta p$.
a) *Montrer qui'il existe une fonction* g *qui depend de* f, w *et* η, *et une fonction* φ *strictement positive sur* $]0,1[$ *qui dépend de* p *et* η *telle que*

$$\int_0^1 \varphi u'v'dx + \frac{1}{1+\eta}\int_0^1 uv = \int_0^1 gvdx, \qquad \forall v \in H^1(]0,1[). \tag{4}$$

b) *Montrer que :* $\|u\|_{L_\infty(]0,1[)} \leq (1+2\eta)\|f\|_{L_\infty(]0,1[)}$.