Université Larbi Ben M'hidi, Oum EL Bouaghi

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques et Informatique, Licence Maths 2$^{\text{ème}}$ Année

2019-2020 (S3) Examen: Analyse numérique 1 Durée :1h30min

Exercice 01(8 pts):

1. Montrer que la fonction $f(x) = x - ln(1 + 2x)$ admet deux racines, l'une évidente que l'on précisera, l'autre α que l'on localisera dans un intervalle I de longueur $\frac{1}{2}$.

2. Pour approcher α, on définit la suite suivante : $x_0 \in I$ donné et $x_{n+1} = ln(1 + 2x_n)$.

a) Montrer que cette suite converge bien vers α, et quel est son ordre de convergence ?

b) Déterminer le nombre d'itérations assurant que l'erreur $|x_n - \alpha| \leq 10^{-6}$

3.**a)** Étudier la convergence de la méthode de Newton vers α.

b) Justifier le choix du x_0 qui assure la convergence et calculer deux itérés.

Exercice 02 (8 pts):

1. Trouver le polynôme qui interpole la fonction $f(x) = 2sin(\frac{1}{3}x)$ aux noeuds $x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{2}$ et $x_2 = \pi$ en utilisant :

(a) La méthode de Newton

(b) La méthode de Lagrange.

2. Quel polynôme est le plus précis, celui trouvé en (a),ou (b) ? Justifier votre réponse.

3. donner une approximation de $f(\frac{\pi}{4})$.

4. Calculer une borne supérieure de l'erreur en $x = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 03 (4 pts):

1. Sachant que:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2$$

.

Calculer une approximation de $\ln 2$ en appliquant la méthode des trapèzes composée avec 4 sous- intervalles.

2. Effectuer une majoration de l'erreur absolue commise par cette quadrature (*on rappelle que*:$|E_{TC}| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} \max\limits_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|$)

Corrigé

Exercice 1(9.5 pts):

1. 0 est la racine évidente **(0.5pt)**

$f^{'}(x) = \frac{2x-1}{1+2x}$ + tableau de variation **(0.5pt)**

$f(1) = -0.09 < 0$ $f(1.5) = +0.12 > 0$ **(0.5pt)**

f continue et $f(1).f(1.5) < 0$ alors $\exists \alpha \in I = [1; 1.5]$ **(0.5pt)**

2. a) (i) $g^{'}(x) = \frac{2}{1+2x} > 0$ donc g croissante **(0.5pt)**

alors $g(I) = [g(1); g(1.5)] = [1.09; 1.38] \subset I$ **(0.5pt)**

(ii) $g^{''}(x) = \frac{-4}{(1+2x)^2} < 0$ alors $g^{'}$ décroissante **(0.5pt)**

donc $max|g^{'}(x)| = g^{'}(1) = \frac{2}{3} = k < 1$ **(0.5pt)**

$g^{'}(\alpha) = \frac{2}{1+2\alpha} >\neq 0$ **(0.5pt)** donc la méthode est d'ordre 1 **(0.5pt)**

b) $n \geq \dfrac{ln(\frac{\epsilon(1-k)}{|x_1-x_0|})}{lnk}$ **(0.5pt)**

$x_1 = g(x_0) = ln3$ **(0.5pt)**

$n \geq 31.06 \Rightarrow n = 32.$ **(0.5pt)**

3. a) $f^{'}(x) = \frac{2x-1}{1+2x} \neq 0 \forall x \in [1; 1.5]$ **(0.5pt)**

$f^{''}(x) = \frac{4}{(1+2x)^2} \neq 0 \forall x \in [1; 1.5]$ **(0.5pt)**

$f^{''}(x_0) = f(x_0) > 0$ puisque $f^{''}(x_0) > 0$ il suffit de choisir $f(x_0) > 0$**(0.5pt)**

b) $x_0 = 1.5$ car $f(x_0) > 0$ **(0.5pt)**

$x_1 = 1.272588$ **(0.5pt)** , $x_2 = 1.250527$ **(0.5pt)**

Exercice 2(8.5 pts):

1. (a) la méthode de Newton

Table de D.D ou Table D.N.D **(0.5pt)**

$P_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$ **(0.5pt)**

$P_2(x) = 0 + \frac{2}{\pi}(x - 0) + \frac{2\sqrt{3}-4}{\pi^2}(x - 0)(x - \frac{\pi}{2})$ **(0.5pt)**

$P_2(x) = \frac{4-\sqrt{3}}{\pi}x + \frac{2\sqrt{3}-4}{\pi^2}x^2$ **(0.5pt)**

b) Méthode de Lagrange :

$P_2(x) = y_0L_0(x) +_1 L_1(x) + y_2L_2(x)$ **(0.5pt)**

$L_0(x) =$**(0.5pt)**

$L_1(x) =$**(0.5pt)**

$L_2(x) =$**(0.5pt)**

$P_2(x) = \frac{4-\sqrt{3}}{\pi}x + \frac{2\sqrt{3}-4}{\pi^2}x^2$ **(0.5pt)**

2. Les deux polynôme donne la même précision **(0.5pt)** , car le polynôme qui passe par les points x_0, x_1, x_2 est unique **(0.5pt)**

3. $f(\frac{\pi}{4}) \simeq P_2(\frac{\pi}{4})$**(0.5pt)** $P_2(\frac{\pi}{4}) = 0.53349305$**(0.5pt)**

4. $|E_2(x)| \leq \dfrac{max|f^3(\xi)|}{3!}|(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)|$ **(0.5pt)**

$f^3(x) = \frac{-2}{27}cos(\frac{1}{3}x)$**(0.5pt)**

$max|f^3(x)| = |f^3(0)| = \frac{2}{27}$**(0.5pt)**

$|E_2(x)|0.017943$ **(0.5pt)**

Exercice 3(3 pts):

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 0.25$ **(0.5pt)**

$ln2 \simeq \dfrac{h}{2}[f(x_0) + f(x_4) + 2(f(x_1) + f(x_2) + f(x_2))]$ **(0.5pt)**

$= \dfrac{0.25}{2}[f(0) + f(x_1) + 2(f(0.25) + f(0.5) + f(0.75))]$ **(0.5pt)**

$= 0.697023$ **(0.5pt)**

2. bonus **(1 pt)**

Consultation Jeudi 13/02/2020 à 11h.15 K17