Complément de mesure et d'intégration
Examen: Session Janvier 2020

Exercice 1 [4 *points*] *Soit* (A_n) *une suite de parties d'un ensemble* X*, définie par* $A_{2j-1} = A$ *et* $A_{2j} = B$*,* $j \geq 1$ *où* A, B *sont deux parties de* X*. Est−ce que*

$$\lim_{n\to\infty} \inf A_n = \lim_{n\to+\infty} \sup \mathrm{A}_n$$

Exercice 2 [6 *points*] *Soient* $X = \{a, b, c\}$ *un ensemble et* $\mathcal{C} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$ *une famille de parties de* X*. On définit une fonction d'ensemble* μ *sur* $\mathcal{C}$ *comme suit:*

$$\mu(\emptyset) = 0, \mu(\{a\}) = 1, \mu(\{b, c\}) = 2, \text{ et } \mu(X) = 3$$

1. *Vérifier que* μ *est une mesure positive sur* $\mathcal{C}$

2. *Déterminer la mesure extérieure* μ^* *sur* $\mathcal{P}(X)$ *associée à* μ

3. *Déterminer la famille* $\Im_{\mu^*}$ *des parties extérieurement mesurables*

Exercice 3 [10 *points*] *Soient* $\mu, \upsilon, \upsilon_1$ *et* υ_2 *des mesures signées sur l'espace mesurable* $(X, \mathcal{A})$*. Montrer que*

1. $\upsilon_1 \ll \mu$ *et* $\upsilon_2 \ll \mu$ *alors* $\upsilon_1 + \upsilon_2 \ll \mu$
2. $\upsilon_1 \perp \mu$ *et* $\upsilon_2 \perp \mu$ *alors* $\upsilon_1 + \upsilon_2 \perp \mu$
3. $\upsilon_1 \ll \mu$ *et* $\upsilon_2 \perp \mu$ *alors* $\upsilon_1 \perp \upsilon_2$
4. $\upsilon \ll \mu$ *et* $\upsilon \perp \mu$ *alors* $\upsilon \equiv 0$
5. $\mu \perp \mu$ *alors* $\mu \equiv 0$

NB: La consultation des copies aura lieu le **16/02/2020** à **9h:30** (salle **K3**).