Corrigé : Méthodes Numériques

EXO 1 (partie 01).

1) La méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & -3 & -3 & -3 \\ -3 & 10 & -4 & -4 \\ 3 & -4 & 18 & 18 \end{array}\right)\begin{array}{c} L_1^{(0)} \\ L_2^{(0)} \\ L_3^{(0)} \end{array}$$

1ère étape : $\frac{1}{3} L_1^{(0)} + L_2^{(0)} \rightsquigarrow L_2^{(1)}$ 0,5

$-\frac{1}{3} L_1^{(0)} + L_3^{(0)} \rightsquigarrow L_3^{(1)}$ 0,5

On trouve :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 9 & -5 & -5 \\ 0 & -3 & 19 & 19 \end{array}\right)\begin{array}{c} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} \\ L_3^{(1)} \end{array}$$ 0,5

2ème étape $\frac{1}{3} L_2^{(1)} + L_3^{(1)} \rightsquigarrow L_3^{(2)}$ 0,5

on trouve :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 9 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{52}{3} & \frac{52}{3} \end{array}\right)$$ 0,5

par la méthode de remontée on obtient

$$\begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$ 0,5

2) $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 0,5

3) $M_2 M_1 A = U = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -3 \\ 0 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{52}{3} \end{pmatrix}$ 0,5

$A = (M_2 M_1)^{-1} U$ 0,5

$L = (M_2 M_1)^{-1} = M_1^{-1} M_2^{-1}$ 0,5 $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$ 0,5

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$ 0,5

On

$2^{\text{ème}}$ méthode :

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{pmatrix} \quad 0{,}5$$

$$0{,}25 \quad = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ l_{21}U_{11} & l_{21}U_{12}+U_{22} & l_{21}U_{13}+U_{23} \\ l_{31}U_{11} & l_{31}U_{12}+l_{32}U_{22} & l_{31}U_{13}+l_{32}U_{23}+U_{33} \end{pmatrix}$$

par identification 0,25

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \quad 0{,}25 \quad , \quad U = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -3 \\ 0 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{52}{3} \end{pmatrix} \quad 0{,}5$$

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L) \times \det(U) = \quad 0{,}5$$

$$= 1 \times 9 \times 9 \times \frac{52}{3} = 1404 \quad 0{,}5$$

P3

Exo 1

1) $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 - 3x_3 = -3 \\ -3x_1 + 10x_2 - 4x_3 = -4 \\ 3x_1 - 4x_2 + 18x_3 = 18 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{3}{10}x_1 + \frac{4}{10}x_3 - \frac{4}{10} \\ x_3 = -\frac{1}{6}x_1 + \frac{2}{9}x_2 + 1 \end{cases}$ 0,5

Jacobi

$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{3}x_2^{(k)} + \frac{1}{3}x_3^{(k)} - \frac{1}{3} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{3}{10}x_1^{(k)} + \frac{2}{5}x_3^{(k)} - \frac{2}{5} \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{6}x_1^{(k)} + \frac{2}{9}x_2^{(k)} + 1 \end{cases}$ 1

G.S

$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{3}x_2^{(k)} + \frac{1}{3}x_3^{(k)} - \frac{1}{3} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{3}{10}x_1^{(k+1)} + \frac{2}{5}x_3^{(k)} - \frac{2}{5} \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{6}x_1^{(k+1)} + \frac{2}{9}x_2^{(k+1)} + 1 \end{cases}$ 1

2) On a A est à D.S.D : $|a_{11}| = 9 > |a_{12}| + |a_{13}| = 3+3 = 6$

$|a_{22}| = 10 > |a_{21}| + |a_{23}| = 3+4 = 7$

0,5 $|a_{33}| = 18 > |a_{31}| + |a_{32}| = 3+4 = 7$

0,5

donc les méthodes de Jacobi et G.S convergent.

$B_J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & 0 & \frac{4}{10} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{9} & 0 \end{pmatrix}$ 1

0,5

$\|B_J\|_1 = \max_{1\le j\le n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right) = \max\left(\frac{3}{10}+\frac{1}{6}, \frac{1}{3}+\frac{2}{9}, \frac{1}{3}+\frac{4}{10}\right)$

$= \max\left(\frac{28}{60}, \frac{5}{9}, \frac{22}{30}\right) = \frac{22}{30} = 0{,}73$ 0,5

$\|B_J\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right) = \max\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{7}{18}\right) = 0{,}7$ 0,5 0,5

P4

$\rho(B_J) = \max |\lambda_i|$ 0,5

$$\det(B_J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & -\lambda & \frac{4}{10} \\ \frac{-1}{6} & \frac{2}{9} & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + \frac{12}{90}\lambda$$

$$= \lambda\left(-\lambda^2 + \frac{12}{90}\right)$$ 0,5

$\lambda = 0, \quad \lambda = \pm\sqrt{\frac{2}{15}}$ 0,5

$\rho(B_J) = \sqrt{\frac{2}{15}}$ 0,5

4) Jacobi : $k=0$ $\begin{cases} x_1^{(1)} = -\frac{1}{3} \\ x_2^{(1)} = -\frac{2}{5} \\ x_3^{(1)} = 1 \end{cases}$ 0,5 , $k=1$ $\begin{cases} x_1^{(2)} = -\frac{2}{15} \\ x_2^{(2)} = -\frac{1}{10} \\ x_3^{(2)} = \frac{29}{30}. \end{cases}$ 0,5

Gauss-Seidel : $k=0$ $\begin{cases} x_1^{(1)} = -\frac{1}{3} \\ x_2^{(1)} = -\frac{1}{2} \\ x_3^{(1)} = \frac{17}{18} \end{cases}$ 0,5 , $k=1$ $\begin{cases} x_1^{(2)} = -\frac{5}{27} \\ x_2^{(2)} = \frac{-7}{90} \\ x_3^{(2)} = \frac{821}{810} \end{cases}$ 0,5

5) Jacobi : $\| X_J^{(2)} - X \|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{10} \\ \frac{\cancel{29}}{30} \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\frac{4}{225} + \frac{1}{100} + \frac{1}{900}} = 0,16$ 0,5 0,5

G-S

$\| X_{GS} - X \|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{5}{27} \\ -\frac{7}{90} \\ \frac{821}{810} \end{pmatrix} \right\|_2 = 0,2$ 0,5 0,5