Universitaire Larbi Ben M'hidi O.E.B jan 2020

Département de MI Durée : 1 h 30mn

L'examen Final Optimisation

Exercice 01 :
On considère le problème de minimisation suivant

$$(P) \qquad \min_{v\in\mathbb{R}^n} J(v)$$

où $J(v) = \frac{1}{2}\langle Av, v\rangle - \langle b, v\rangle + c$ et A est une matrice symétrique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et $v, b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer légalité suivante

$$J(tu + (1-t)v) = tJ(u) + (1-t)J(v) + \frac{t(t-1)}{2}\langle A(u-v), u-v\rangle .$$

2. À quelle condition sur A,

   a. La fonction J est-elle convexe ? strictement convexe ?

   b. J est une fonction coercive.

3. Supposont maintenant que A est une matrice symétrique définie positive

   a. Le problème (P) admet une solution ?justifié votre réponse.

   d. Résoudre alors le problème (P), en déduire la valeur minimal de J.

Exercice 02 : Considérons un nuage de n points $M_i = (t_i, x_i) \in \mathbb{R}^2$ $i = 1, 2, .., n$.
On va utilise la méthode des moindres carrés pour approcher ce nuage de points par une parabole d'équation $x(t) = at^2 + bt + c$ où a, b et c sont trois réels. Autrement dit, on fait une régression "parabolique", On veut donc trouver les réels a, b et c solution de

$$(P_2) : \begin{cases} \min J(a, b, c) \\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

où $J(a, b) = \sum_{i=1}^{10} \left(x_i - at_i^2 - bt_i - c\right)^2$.

1. Calculer le gradient et la matrice hessienne de la fonction J.
2. Ecrire le problème (P_2) sous la forme matriciel $Ax = B$ ou A est une matrice d'odre 3 et $B \in \mathbb{R}^3$ et $x = (a, b, c)^T$.
3. Preunant maintenant $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = (2, -1, 1)^T$

   a. Démontrer que la fonction J est strictement convexe.

   b. Démontrer que la fonction J est coercive.

   c. Le problème (P_2) admet-il une solution ? Et-elle unique ?

   d. Résoudre le problème (P_2) .

Exercice 03 :
1. Soit $f_1, f_2,..., f_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}^*$des fonctions de classe C^1 et convexes et γ_1, γ_2, ... , γ_p n des constantes strictement positives.
– Si au moins une des fonctions $f_1, f_2,..., f_p$ est elliptique alors $g = \gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2 + ... + \gamma_p f_p$ est elliptique.
2. donner le développement de Taylor d'ordre 2 d'une fonction $f(x, y)$ deux fois dérivable au voisinage de (1,1).
– en déduire le développement de Taylor d'ordre 2 de la fonction $f(x, y) = e^x \ln(xy)$.