Pr. Soula

<u>Université Larbi Ben M'Hidi -Oum El Bouaghi-</u>

Faculté: Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie
Département: Mathématiques et informatique
Année Universitaire: 2019 / 2020

2 ème année - Domaine: Mathématiques et informatique - Filière: Mathématiqu - Spécialité: MATHS - 3 ème Semestre

Section N° 1 **Groupe N°** 1

Relevé de notes de la Matière ANL3 / Analyse 3 / UE Fondamental

Date : 20/01/2020

N°	Nom et prénoms	Matricule	Etat	Exam	TD	TP	Conf	Sem	Proj	Stage	Autre	Rattr
1	Abdennebi Mohammed Achra	17/34008371	N	06,00	10,75							
2	Abed Doua	18/34000875	N	06,00	08,50							
3	Achi Ikram	18/34009084	N	08.50	14.00							
4	Adjeroud Wahiba	18/34004484	N	07,50	10,50							
5	Aggoun Hala	17/34007094	N	02,50	06,50							
6	Aggoun Marwa	17/34007129	N	08,50	07,00							
7	Agoudjil Merieme	18/34014132	N	01,00	07,00							
8	Assoul Ahmed	18/34007637	N	08.50	16,00							
9	Ayadi Mohammed Hicham	17/34016043	N	01,50	08,00							
10	Bareche Meriem	17/34012750	N	06,00	06,50							
11	Bechekaoui Fatiha	17/34010783	N	02,50	08,75							
12	Beghdouche Sabrina	18/34013155	N	01,00	08,50							
13	Bekhouche Amel	18/34008930	N	08,00	14,00							
14	Belazizia Nada	18/34001189	N	10,50	12,75							
15	Belghit Mohamed Tayeb	17/34013862	N	06,50	11,50							
16	Belkhiri Chaima	18/34006521	N	09,00	09,50							
17	Benaissa Wissam	17/34005277	N	05,00	09,50							
18	Bouakaz Amira	17/34006530	N	07,50	08,50							
19	Boudjerar Ghennoudja	18/34007549	N	05,00	12,75							
20	Boufrioua Lina	18/34005949	N	06,00	08,75							
21	Boulakhras Nihad El Ahlam	18/34008348	N	07.50	08,25							
22	Boumaza Khoula	18/34004562	N	05,00	10,75							
23	Boumaza Sara	18/34014329	N	08,00	09,50							
24	Bouziane Insaf	18/34003871	N	08,00	08,50							
25	Derbal Oumayma	18/34002285	N	01,50	7,75							
26	Djebailia Housseyn	18/34000846	N	12,00	10,00							
27	Djebbar Kamelia	18/34009179	N	09,00	13,50							
28	DJELLAL ROCHDI	17/34010693	N	07,00	08,00							
29	Ferdi Ouafa	17/34008374	N	01,50	10,25							
30	Fethallah Hadjer	18/34006531	N	06,50	12,00							
31	Gheroui Khaled	17/34009743	N	04.50	abs							
32	Ghodbane Assala	18/34007003	N	06,50	09,00							
33	Ghoul rebia	18/34006016	N	10,00	15,00							
34	Gouadjelia Seif El Islem	17/34005337	N	07,50	12,75							
35	Guellif Aya	18/34004996	N	05,50	09,25							
36	Kachkouche Soulef	18/34005902	N	07,50	11,00							

Université Larbi Ben M'Hidi -Oum El Bouaghi-

Faculté: Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie
Département: Mathématiques et informatique
Année Universitaire: 2019 / 2020

2 ème année - Domaine: Mathématiques et informatique - Filière: Mathématiqu - Spécialité: MATHS - 3 ème Semestre
Section N° 1 **Groupe N°** 1

Relevé de notes de la Matière ANL3 / Analyse 3 / UE Fondamental Date : 20/01/2020

N°	Nom et prénoms	Matricule	Etat	Exam	TD	TP	Conf	Sem	Proj	Stage	Autre	Rattr
37	Kebaili Nassrine	18/34007602	N	07,00	14,50							
38	Krimat Rabab romaissa	18/3908946	N	/	/							
39	Laala Imene	18/34005080	N	06,50	13,00							
40	Ladouali Nabila	18/34002979	N	06,00	08,00							
41	Lamri Rania	18/34007687	N	02,50	09,25							
42	Maza Aya	17/34007066	N	07,00	08,00							
43	Meghiaz Serour	17/34006208	N	08,00	15,00							
44	Meniche Houria	17/34005468	N	01,50	10,00							
45	Merabti Fadila	18/34008625	N	10,00	10,00							
46	Meziani Asma	18/34002956	N	08,00	10,50							
47	Ouennas Oumima	18/34005488	N	08,50	12,00							
48	Roubal Halim	17/34010668	N	06,00	07,00							
49	Semache Ahmed Radhouane	18/34003789	N	/	/							
50	Traia Boutheina	18/34012495	N	04,50	12,00							
51	Yahi Bouthaina	17/34000965	N	10,00	14,00							
52	Zerari Rayane	18/34000914	N	11,50	14,50							
53	Zoghmar Nour	17/34005193	N	06,50	06,50							
54	Haloui Doua			06,50	15,75							
55	Messaoudi widad	0		08,50	10,75							
56	Ramili Nihad		-	07,00	10,25							
57	Boukheroufa Zahia			10,00	11,75							
58	Abdouni chaima			08,00	10,75							
59	Houilia Fares			03,50	08,00							
60	Zahmar Zoubra			07,00	11,00							

Pr. Soula

المعاينة يوم الخميس 13 فيفري على العاشرة.

UNIVERSITE L'ARBI BEN M'HIDI OUM eL BOUAGHI.......2019/2020
Département de Mathématique 2^{eme} année L. M. D
Module: Analyse 3.
Enseignante: $Soula - Y$

Examen le 28/01/2020

Exercice 1 :($7pt$)

(4) **1**) Etudier la nature de cette série

$$\sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{a^{2n}+a^n+1}, \text{ où } a \geq 0.$$

(3) **2**) Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.
Comparer la nature des deux séries

$$\sum u_n \text{ et } \sum \frac{u_n}{1+u_n}.$$

Exercice 2 :($6.5pt$)

Considérer la suite de fonctions

$$f_n(x) = \frac{\cos(n^3x^2)}{n} \qquad \text{pour } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

(2,5) **1**) Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f sur $\mathbb{R}$.
(2,5) **2**) Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f sur $\mathbb{R}$
(1,5) **3**) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

Exercice 3 :($6.5pt$)

(4) Développer en série entière la fonction f définie par:

$$f(x) = \frac{x^2+x-3}{(x-2)^2(2x-1)}.$$

(2,5) et précisier le rayon de convergence de la série obtenue.

Bonne chance

2ème année L.M.D..

Correction d'examen

Exercice 1 (7 pts)

1) $\sum U_n = \sum \frac{a^n}{a^{2n}+a^n+1}$; $a \geq 0$

* Si $a=0$ alors $U_n = 0$ par suite la série $\sum U_n = 0$ donc elle est convergente.

* Si $a=1$ alors $U_n = \frac{1}{3}$ et par suite la série $\sum U_n$ est divergente car son terme général ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$.

* Si $0<a<1$, on a $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{a^n} = 1$ donc les séries $\sum U_n$ et $\sum a^n$ sont de même nature. Comme la série géométrique $\sum a^n$ est convergente car $0<a<1$ alors la série $\sum U_n$ est convergente.

* Si $a>1$, on a, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a^n} = 0$ et soit $V_n = \frac{1}{a^n}$ donc donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{V_n}{U_n} = 1$ alors les séries $\sum U_n$ et $\sum V_n$ sont de même nature.

Comme la série géométrique $\sum \left(\frac{1}{a}\right)^n$ est convergente car $0<\frac{1}{a}<1$, alors la série $\sum U_n$ est convergente.

2) la comparaison de ~~la~~ nature de deux séries :

$\sum U_n$ et $\sum V_n = \sum \frac{U_n}{1+U_n}$

1 a) Soit $V_n = \frac{U_n}{1+U_n}$, nous avons $\forall n \in \mathbb{N} : V_n \leq U_n$

d'après le théorème de comparaison, on a :

→ Si $\sum U_n$ est convergente, alors la série $\sum V_n$ est convergente

→ Si $\sum V_n$ est divergente, alors la série $\sum U_n$ est divergente.

Suite de l'exercice 1

(1) b) Si la série $\sum v_n$ est convergente, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ et par suite $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} u_n \frac{1+u_n}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} (1+u_n) = 1$$

donc $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature donc $\sum u_n$ est convergente.

(1) c) Si la série $\sum u_n$ est divergente, nous avons :

→ Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l \neq 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{l}{1+l} \neq 0$ donc $\sum v_n$ est divergente.

→ Si $\lim_{n\to+\infty} u_n$ n'existe pas, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n$ n'existe pas et par suite $\sum v_n$ est divergente.

→ Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{1+u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{u_n} = 1 \neq 0$$

par suite $\sum v_n$ est divergente.

Exercice 2 (6,5 pts)

$$f_n(x) = \frac{\cos(n^3x^2)}{n}, \quad x \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}^*$$

1) Convergence simple

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\cos(n^3x^2)}{n} = 0$ (car $\frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ e[t]
$|\cos(n^3x^2)| \leq 1$)

donc $f_n(x)$ converge simplement vers la fonction $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

2) Convergence Uniforme :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on a : $|f_n(x)| = \left|\frac{\cos(n^3x^2)}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$

donc : $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \left|\frac{\cos(n^3x^2)}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$

d'où : $0 \leq \lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

ceci implique que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0$

donc (f_n) converge uniformément vers la fonction $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

3) (f_n) est intégrables sur $[0,1]$ (car continues sur $\mathbb{R}$), qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $f(x) = 0$

donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\int_0^1 f_n(x)\,dx\right) = \int_0^1 \left(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)\right) dx = \int_0^1 0\,dx = 0.$

Ex 3 (6,5 pts)

Développement en série entière la fonction f, tel que

$$f(x) = \frac{x^2+x-3}{(x-2)^2(2x-1)}$$

$$f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{(x-2)^2} + \frac{c}{2x-1} \quad , a, b, c \in \mathbb{R}.$$

$$= \frac{a(x-2)(2x-1) + b(2x-1) + c(x-2)^2}{(x-2)^2(2x-1)}$$

d'après les calculs on trouve : $a = 1$, $b = 1$ et $c = -1$

$$f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{b}{(x-2)^2} - \frac{1}{2x-1}$$

* Si $x \neq 2$: $\frac{1}{x-2} = \frac{-1}{2-x} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n}$
$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{-1}{2^{n+1}}x^n$

* Si $x \neq \frac{1}{2}$: $\frac{-1}{2x-1} = \frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$

* et si $x \neq 2$: $\frac{1}{(x-2)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^{n+1}}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{2^{n+2}}x^n$

donc : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{2^{n+1}}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}2^n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{2^{n+2}}x^n$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+2}} + 2^n\right)x^n$$

déterminer R (rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{2^{n+1}}+\frac{n+1}{2^{n+2}}+2^n\right)x^n$

$$a_n = \frac{-1}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+2}} + 2^n = 2^n + \frac{n}{4\,2^n} - \frac{1}{4\,2^n} = 2^n + \frac{n-1}{4\,2^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}+\frac{n}{4\,2^{n+1}}}{2^n+\frac{n-1}{4\cdot 2^n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2^n\cdot 2}{2^n+\frac{n-1}{4\cdot 2^n}} + \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n}{4\cdot 2^{n-1}}}{2^n+\frac{n-1}{4\cdot 2^n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{1+\underbrace{\frac{n-1}{4\cdot 2^n}}_{\to 0}} + \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}}{4\underbrace{\frac{2^{2n}}{n}}_{\to+\infty}+1-\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}}$$

$$= 2 \Rightarrow R = \frac{1}{2}$$