UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI DEPARTEMENT : MI ANNEE AC. : 2019/2020

Examen final du module Distributions II Date : 05/02/2020 Durée : 1h30

Exercice 1 (2 + 2,5 + 2,5 = 7 points).

Soit $(\lambda, p, k, s) \in [0, \infty[\times [1, \infty] \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ et soit $u_\lambda(x) = e^{-\lambda|x|}, x \in \mathbb{R}$.

1) Prouver que $u_\lambda \in S'(\mathbb{R})$ puis calculer les dérivées $u_\lambda{}'$ et $u_\lambda{}''$ et vérifier que $u_\lambda{}'' = \lambda^2 u_\lambda - 2\lambda\delta$.

2) Étudier (selon les valeurs des paramètres k, p, λ) l'appartenance de u_λ à l'espace $W^{k,p}(\mathbb{R})$.

3) Étudier (selon les valeurs des paramètres λ, s) l'appartenance de u_λ à l'espace $H^s(\mathbb{R})$.

Exercice 2 (2 + 2 = 4 points).

1) Soit $(v, m) \in S'(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{N}$ tel que $(1 + |M|^2)^{\frac{m}{2}} \mathcal{F}v \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Prouver que $v \in C_0^m(\mathbb{R}^n)$.

2) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Résoudre le problème $\begin{cases} u - \Delta u = \mathcal{F}f \\ u \in C_0^2(\mathbb{R}^n). \end{cases}$

Exercice 3 (1 + 1,5 + 2,5 + 1 + 1,5 + 1,5 = 9 points).

Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$. Prouver que

1) $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, $\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \left\| \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$,

2) $\{\delta_a; a \in \mathbb{R}^n\} \subset W^{-n,\infty}(\mathbb{R}^n)$,

3) $W^{n,1}(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n)$,

4) $W_0^{n,1}(\Omega) \subset C_0(\bar{\Omega})$,

5) $W^{n,1}(\Omega) \subset C(\Omega)$,

6) si Ω possède la propriété de n-prolongement, alors $W^{n,1}(\Omega) \subset C_0(\bar{\Omega})$.

Bon succès