Unité: Complément de Mesure et d'intégration
Devoir à rendre le 15/12/2019

Problème
Préliminaire

Soit X un ensemble non vide et $(A_n)_{n\geq 1}$ et $(B_n)_{n\geq 1}$ deux suites de parties de X. Rappelons que

$$\limsup_n A_n = \overline{\lim}_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j \text{ et } \liminf_n A_n = \underline{\lim}_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{j=n}^{\infty} A_j$$

et si $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite réelle, alors on définit $\underline{\lim} a_n$, $\overline{\lim} a_n$ par

$$\underline{\lim} a_n := \sup_{n\geq 1}\inf_{k\geq n} a_k = \sup_{n\geq 1} \widetilde{a}_n \text{ et } \overline{\lim} a_n := \inf_{n\geq 1}\sup_{k\geq n} a_k = \inf_{n\geq 1} \widehat{a}_n$$

où $\widetilde{a}_n = \inf\{a_k, k\geq n\}$ et $\widetilde{a}_n = \sup\{a_k, k\geq n\}$, ces deux quantités existent toujours dans $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$.

1ère partie

Montrer les propriétés suivantes:

1. $\underline{\lim}_{n\to+\infty} A_n \subset \overline{\lim}_{n\to+\infty} A_n$
2. $\left(\underline{\lim}_{n\to+\infty} A_n\right)^c = \overline{\lim}_{n\to+\infty} A_n^c$, et $\left(\overline{\lim}_{n\to+\infty} A_n\right)^c = \underline{\lim}_{n\to+\infty} A_n^c$.
   En déduire que si $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n^c = A^c$.
3. $\underline{\lim}_{n\to+\infty}(A_n \cap B_n) = \underline{\lim}_{n\to+\infty}(A_n) \cap \underline{\lim}_{n\to+\infty}(B_n)$ et que
   $$\overline{\lim}_{n\to+\infty}(A_n \cup B_n) = \overline{\lim}_{n\to+\infty}(A_n) \cup \overline{\lim}_{n\to+\infty}(B_n)$$
4. $\overline{\lim}_{n\to+\infty}(A_n \cap B_n) \subset \overline{\lim}_{n\to+\infty}(A_n) \cap \overline{\lim}_{n\to+\infty}(B_n)$ et que
   $$\underline{\lim}_{n\to+\infty}(A_n \cup B_n) \supset \underline{\lim}_{n\to+\infty}(A_n) \cup \underline{\lim}_{n\to+\infty}(B_n)$$

   Donner des contre-exemples où les égalités peuvent ne pas être lieu.
5. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$ and $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n = B$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(A_n \cap B_n) = A\cap B$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(A_n \cup B_n) = A \cup B$

6. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$ alors pour toute partie B, $\lim\limits_{n\to+\infty} (A_n \Delta B) = A\Delta B$
7. Si $A_{2j-1} = B$ et $A_{2j} = C$, $j \geq 1$, determiner $\underline{\lim}_{n\to+\infty} A_n$ et $\overline{\lim}_{n\to+\infty} A_n$. Sous quelles conditions sur B et C les limites n'existent pas ou sont équales.
8. $\limsup\limits_n A_n = \{x \in X; x \in \text{à une infinité de } A_n\}$.
9. $\liminf\limits_n A_n = \{x \in X; x \in \text{à les } A_n \text{ sauf un nombre fini d'entre eux}\}$.
10. Pour toute partie $B \subset X$ on a:

$$\begin{aligned} B - \limsup_n A_n &= \liminf_n (B - A_n), \\ B - \liminf_n A_n &= \limsup_n (B - A_n) \\ \limsup_n A_n - \liminf_n A_n &\subset \limsup_n (A_n \Delta A_{n+1}). \end{aligned}$$

11. $\underline{\lim} I_{A_n} = I_{\underline{\lim} A_n}$ et $\overline{lim} I_{A_n} = I_{\overline{\lim} A_n}$ où I_A est la fonction indicatrice de l'ensemble A.
12. $I_{\overline{\lim}(A_n \cup B_n)} = \max\left\{I_{\underline{\lim} A_n}, I_{\underline{\lim} B_n}\right\}$ et $I_{\underline{\lim}(A_n \cap B_n)} = \inf\left\{I_{\overline{\lim} A_n}, I_{\overline{\lim} B_n}\right\}$

Application: Dans $\mathbb{R}$ on considère les suites d'ensembles:

$$A_{2n} = \left[-1; 2 + \frac{1}{n}\right[, A_{2n+1} = \left[-2 - \frac{1}{n}; 1\right[; n \geq 1, B_n = \left]-\infty; a_n\right], a_n \in \mathbb{R}; n \geq 1.$$

Calculer dans les deux cas $\limsup\limits_n A_n$,$\limsup\limits_n B_n$ et $\liminf\limits_n A_n$ et $\liminf\limits_n B_n$.

$\mathbf{2}^{éme}$ partie

Montrer les propriètés suivantes

1. $\underline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n) \leq a_n \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n)$ et $\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n)$
2. $\overline{\lim}_{n\to+\infty}(-a_n) = -\underline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n)$
3. $\overline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n) + \overline{\lim}_{n\to+\infty}(b_n)$ si la quantité à droite est définie.
4. $\underline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n + b_n) \geq \underline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n) + \underline{\lim}_{n\to+\infty}(b_n)$ si la quantité à droite est gefinie.
5. $\overline{\lim}_{n\to+\infty}(\lambda a_n) = \lambda\, \overline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n)$, si $\lambda > 0$
6. $\underline{\lim}_{n\to+\infty}(\lambda a_n) = \lambda\, \underline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n)$, si $\lambda > 0$
7. $\overline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n b_n) \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n)\, \overline{\lim}_{n\to+\infty}(b_n)$ si $a_n > 0$ et $b_n > 0$ pour tout n.

8. $\underline{\lim}_{n\to+\infty}(a_nb_n) \geq \underline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n)\ \underline{\lim}_{n\to+\infty}(b_n)$ si $a_n > 0$ et $b_n > 0$ pour tout n.

9. $\underline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n) \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty}(b_n)\ \underline{\lim}_{n\to+\infty}(b_n)$ et $\overline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n) \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty}(b_n)$ si $a_n \leq b_n$ pour tout n.

10. Soit $a_n > 0$ pour tout n.. Montrer que $\overline{\lim}_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{a_n}\right) = \dfrac{1}{\underline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n)}$ et $\underline{\lim}_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{a_n}\right) = \dfrac{1}{\overline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n)}$

11. Soit (a_n) bornée et non négative et soit $r \in \mathbb{Q}^+$ Montrer que $\overline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n^r) = \left(\overline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n)\right)^r$ et $\underline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n^r) = \left(\underline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n)\right)^r$

12. Montrer que pour toute sou-suite a_{n_k} de a_n on a $\overline{\lim}_{k\to+\infty}(a_{n_k}) \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n)$ et $\underline{\lim}_{n\to k+\infty}(a_{n_k}) \geq \underline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n)$

13. Soit $b_n \to b \in \left]0,+\infty\right[$. Montrer que $\overline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n+b_n) = b+\overline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n)$ et $\underline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n+b_n) = b+\ \underline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n)$

14. Si $a_n > 0$ pour tout n et $b_n \to b \in \left]0,+\infty\right[$ Montrer que $\overline{\lim}_{n\to+\infty}(a_nb_n) = b\overline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n)$ et $\underline{\lim}_{n\to+\infty}(a_nb_n) = b\ \underline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n)$

15. Montrer que $\left|\overline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n)\right| \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty}(|a_n|)$ et $\left|\underline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n)\right| \geq \underline{\lim}_{n\to+\infty}(|a_n|)$. Donner des exemples où les inégalités peuvent être strictes

16. Soint $a_n \to a > 0$ et $\underline{\lim}_{n\to+\infty}(b_n) > 0$, si $b_n^2 - a_nb_n - 6a_n^2 \to 0$. Montrer que $\overline{\lim}_{n\to+\infty}(b_n) < 3a$

17. Montrer que pour toute suite(a_n) on a

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n) \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j\right) \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j\right) \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n)$$

18. Si $a_n > 0$ pour tout n. Montrer que

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty}\left(a_n^{1/n}\right) < \overline{\lim}_{n\to+\infty}\left(a_n^{1/n}\right) < \overline{\lim}_{n\to+\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

Appliquer l'inégalité précidente pour calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{(n!)^{1/n}}$

Applications

Déterminer les $\overline{\lim}_{n\to+\infty}$ et $\underline{\lim}_{n\to+\infty}$ des suites suivantes

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^n 5n+1}{3n+5}, a_n = n^{\sin(n\pi/2)} + \left(\frac{1}{n}\right)\cos(n), \\ a_n &= 2^n + 2^{-n} + (-1)^n\left(2^n - 2^{-n}\right), a_n = \frac{3n\cos(n\pi/4)+2}{2n\sin(n\pi/4)+3} \end{aligned}$$