
Exercice 1 (2 + 2,5 + 2,5 = 7 points).

1) $|u_\lambda| \le 1 \Rightarrow u_\lambda \in L^\infty(\mathbb{R}) \hookrightarrow S'(\mathbb{R})$. $\boxed{0{,}5}$

Pour $\lambda = 0$, on a : $u_\lambda = 1$, donc $u_\lambda' = 0$ et $u_\lambda'' = 0 = \lambda^2 u_\lambda - 2\lambda\delta$. $\boxed{0{,}5}$

Pour $\lambda > 0$, par la formule des sauts, on a : $u_\lambda' = -\lambda e^{-\lambda x} 1_{\mathbb{R}_+} + \lambda e^{\lambda x} 1_{\mathbb{R}_-}$ et $u_\lambda'' = \lambda^2 e^{-\lambda x} 1_{\mathbb{R}_+} - \lambda\delta + \lambda^2 e^{-\lambda x} 1_{\mathbb{R}_-} - \lambda\delta = \lambda^2 u_\lambda - 2\lambda\delta$. $\boxed{1}$

2) $\underline{\lambda = 0}$: $u_\lambda = 1 \Rightarrow u_\lambda \in W^{k,\infty}(\mathbb{R})\ \forall k \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}} |u_\lambda|^p\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} 1 dx = \infty \Rightarrow u_\lambda \notin L^p(\mathbb{R})\ \forall p \ne \infty$. $\boxed{0{,}5}$

$\underline{\lambda > 0}$: $|u_\lambda| \le 1 \Rightarrow u_\lambda \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} |u_\lambda|^p\, dx = 2\int_0^\infty e^{-\lambda p x} dx = \frac{2}{\lambda p} < \infty \Rightarrow u_\lambda \in L^p(\mathbb{R})\ \forall p \ne \infty$. $\boxed{0{,}5}$

$u_\lambda' = -\lambda e^{-\lambda x} 1_{\mathbb{R}_+} + \lambda e^{\lambda x} 1_{\mathbb{R}_-} \Rightarrow |u_\lambda'| = \lambda |u_\lambda| \in L^p(\mathbb{R}) \Rightarrow u_\lambda' \in L^p(\mathbb{R})\ \forall p$, $\boxed{0{,}5}$

$u_\lambda'' = \lambda^2 u_\lambda - 2\lambda\delta \Rightarrow \delta = \frac{1}{2\lambda} u_\lambda'' + \frac{\lambda}{2} u_\lambda \Rightarrow u_\lambda'' \notin L^p(\mathbb{R})\ \forall p$, car sinon δ serait dans $L^p(\mathbb{R})$. $\boxed{0{,}5}$

<u>Conclusion.</u> $\boxed{0{,}5}$ Pour $\lambda = 0$, on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_\lambda \in W^{k,p}(\mathbb{R})$ si $p = \infty$ et $u_\lambda \notin W^{k,p}(\mathbb{R})$ si $p \ne \infty$.

Pour $\lambda > 0$, on a : $\forall p \in [1,\infty]$, $u_\lambda \in W^{k,p}(\mathbb{R})$ si $k \le 1$ et $u_\lambda \notin W^{k,p}(\mathbb{R})$ si $k \ge 2$.

3) De 1), on a : $u_\lambda \in S'(\mathbb{R})\ \forall \lambda \in [0,\infty[$. Il reste à étudier l'appartenance de $(1+|M|^2)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F}u_\lambda$ à $L^2(\mathbb{R})$. $\boxed{0{,}5}$

$\underline{\lambda = 0}$: $u_\lambda = 1 \Rightarrow \mathcal{F}u_\lambda = \delta$ $\boxed{0{,}25}$ $\Rightarrow (1+|M|^2)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F}u_\lambda = (1+0^2)^{\frac{s}{2}} \delta = \delta \notin L^2(\mathbb{R})\ \forall s \in \mathbb{R}$. $\boxed{0{,}25}$

$\underline{\lambda > 0}$: $u_\lambda'' = \lambda^2 u_\lambda - 2\lambda\delta \Rightarrow -4\pi^2\xi^2 \mathcal{F}u_\lambda = \lambda^2 \mathcal{F}u_\lambda - 2\lambda \mathcal{F}\delta \Rightarrow \mathcal{F}u_\lambda(\xi) = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2\xi^2}\ \forall \xi \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\mathcal{F}u_\lambda = 2\lambda\,(\lambda^2 + 4\pi^2|M|^2)^{-1}$ $\boxed{0{,}5}$ $\Rightarrow$

$$2\lambda\left(\min\left\{\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{4\pi^2}\right\}\right)(1+|M|^2)^{-1} \le \mathcal{F}u_\lambda \le 2\lambda\left(\max\left\{\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{4\pi^2}\right\}\right)(1+|M|^2)^{-1} \Rightarrow$$

$$2\lambda\left(\min\left\{\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{4\pi^2}\right\}\right)(1+|M|^2)^{\frac{s-2}{2}} \le (1+|M|^2)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F}u_\lambda \le 2\lambda\left(\max\left\{\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{4\pi^2}\right\}\right)(1+|M|^2)^{\frac{s-2}{2}}.$$

D'où les équivalences : $(1+|M|^2)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F}u_\lambda \in L^2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow s - 2 < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow s < \frac{3}{2}$. $\boxed{0{,}75}$

<u>Conclusion.</u> $\boxed{0{,}25}$ Pour $\lambda = 0$, on a : $\forall s \in \mathbb{R}$, $u_\lambda \notin H^s(\mathbb{R})$.

Pour $\lambda > 0$, on a : $u_\lambda \in H^s(\mathbb{R})$ si et seulement si $s < \frac{3}{2}$.

Exercice 2 (2 + 2 = 4 points).

1) On a : $\forall |\alpha| \le m$, $|M^\alpha \mathcal{F}v| \le (1+|M|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}} |\mathcal{F}v| \le (1+|M|^2)^{\frac{m}{2}} |\mathcal{F}v| = \left|(1+|M|^2)^{\frac{m}{2}} \mathcal{F}v\right| \in L^1(\mathbb{R}^n)$. $\boxed{1}$

On en déduit que , $\forall |\alpha| \le m$, $M^\alpha \mathcal{F}v \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Donc $v = \bar{\mathcal{F}}(\mathcal{F}v) \in C_0^m(\mathbb{R}^n)$. $\boxed{1}$

2) On a : $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S'(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{F}f \in S'(\mathbb{R}^n)$. $\boxed{0{,}25}$

Dans $S'(\mathbb{R}^n)$, on a les équivalences : $u - \Delta u = \mathcal{F}f \Leftrightarrow \mathcal{F}(u - \Delta u) = \mathcal{F}(\mathcal{F}f) \Leftrightarrow (1 + 4\pi^2|M|^2)\mathcal{F}u = \check{f}$
$\Leftrightarrow \mathcal{F}u = (1+4\pi^2|M|^2)^{-1}\check{f}$, car $(1+4\pi^2|M|^2)^{-2} = H_{(2\pi)}((1+|M|^2)^{-1}) \in O_M(\mathbb{R}^n)$.

Ainsi, dans $S'(\mathbb{R}^n)$, $u = \bar{\mathcal{F}}\big((1+4\pi^2|M|^2)^{-1}\check{f}\big)$ est l'unique solution de l'équation $u - \Delta u = \mathcal{F}f$. $\boxed{1}$

Il reste à montrer que cette solution appartient à $C_0^2(\mathbb{R}^n)$. Par 1), il suffit d'avoir $(1+|M|^2)\mathcal{F}u \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

On a : $|(1+|M|^2)\mathcal{F}u| \le (1+4\pi^2|M|^2)|\mathcal{F}u| = |\check{f}| \in L^1(\mathbb{R}^n)$, donc $(1+|M|^2)\mathcal{F}u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. $\boxed{0{,}75}$

Exercice 3 (1 + 1,5 + 2,5 + 1 + 1,5 + 1,5 = 9 points).

1) Soit $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. Le support de φ étant compact, alors, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|\varphi(x)| = \left|\int_{]-\infty,x_1]\times\ldots\times]-\infty,x_n]} \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n\right| \leq \int_{]-\infty,x_1]\times\ldots\times]-\infty,x_n]} \left|\frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}(t_1, \dots, t_n)\right| dt_1 \dots dt_n$ $\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}(t_1, \dots, t_n)\right| dt_1 \dots dt_n = \left\|\frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. Donc $\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \left\|\frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. $\boxed{1}$

2) Soit $a \in \mathbb{R}^n$.

On a : $|\langle \delta_a, \varphi\rangle| = |\varphi(a)| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \left\|\frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|\varphi\|_{W^{n,1}(\mathbb{R}^n)} \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. $\boxed{0,5}$

Ainsi δ_a est continue sur $\left(D(\mathbb{R}^n), \|\ \|_{W^{n,1}(\mathbb{R}^n)}\right)$, donc $\delta_a \in W^{-n,\infty}(\mathbb{R}^n)$. $\boxed{1}$

3) Soit $u \in W^{n,1}(\mathbb{R}^n)$.

Comme $D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{n,1}(\mathbb{R}^n)$, il existe $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset D(\mathbb{R}^n)$ tel que $\varphi_j \xrightarrow{W^{n,1}(\mathbb{R}^n)} u$. $\boxed{0,5}$

On a : $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C_0(\mathbb{R}^n)$ et $\|\varphi_j - \varphi_{j'}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \left\|\frac{\partial^n(\varphi_j - \varphi_{j'})}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|\varphi_j - \varphi_{j'}\|_{W^{n,1}(\mathbb{R}^n)}$ $\forall (j, j')$. $\boxed{1}$

Ainsi $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $C_0(\mathbb{R}^n)$, donc il existe $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ tel que $\varphi_j \xrightarrow{L^\infty(\mathbb{R}^n)} g$. $\boxed{0,5}$

D'où $\varphi_j \xrightarrow{D'(\mathbb{R}^n)} u$ et $\varphi_j \xrightarrow{D'(\mathbb{R}^n)} g$, donc $u = g \in C_0(\mathbb{R}^n)$, car $D'(\mathbb{R}^n)$ est séparé. $\boxed{0,5}$

4) Soit $u \in W_0^{n,1}(\Omega)$. On a : $\tilde{u} \in W^{n,1}(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n)$, donc $u = \tilde{u}|_\Omega \in C_0(\bar{\Omega})$. $\boxed{1}$

5) Soit $u \in W^{n,1}(\Omega)$.
Pour prouver que $u \in C(\Omega)$, il suffit de montrer que $u|_U = C(U)$ pour tout ouvert $U \subset\subset \Omega$. $\boxed{0,5}$
Soit U un ouvert $\subset\subset \Omega$ et et soit $\psi \in D(\Omega)$ tel que $\psi = 1$ sur $\overline{U}$, un tel ψ existe d'après le lemme de séparation.
On a : $u|_U = (\psi u)|_U \in C(U)$, puisque $\psi u \in W_0^{n,1}(\Omega) \subset C_0(\bar{\Omega}) \subset C(\Omega)$. $\boxed{1}$

6) Si Ω possède la propriété de n-prolongemen, alors il existe une application P de $W^{n,1}(\Omega)$ dans $W^{n,1}(\mathbb{R}^n)$ telle que : $\forall u \in W^{n,1}(\Omega)$, $Pu|_\Omega = u$. $\boxed{0,5}$
Donc : $\forall u \in W^{n,1}(\Omega)$, $Pu \in W^{n,1}(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n)$ et $u = Pu|_\Omega \in C_0(\bar{\Omega})$. $\boxed{1}$