

Corrigé du contrôle

Exercice 1 (04.5 pts): Écrire sous forme normale négative (FNN), forme normale conjonctive (FNC) et forme normale disjonctive (FND) les formules ci-dessous (sans l'utilisation de la table de vérité):

- | | |
|--|--|
| 1. $(\neg C \Rightarrow (A \vee \neg B)) = C \vee A \vee \neg B$ | : FNN, FNC, FND |
| 2. $\neg(\neg A \Rightarrow B) \wedge (\neg C \wedge \neg D) = \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D$ | : FNN, FNC, FND |
| 3. $\neg((\neg A \wedge \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B)) = A \vee B \vee (A \wedge B)$ | : FNN, FND = <u>A \vee B</u> : FNC |

Exercice 2 (05 pts): Soit $\Sigma = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ l'ensemble des formes propositionnelles suivantes

- $\varphi_1 = A \wedge \neg B \wedge \neg C$
 $\varphi_2 = B \wedge \neg A \wedge \neg C$
 $\varphi_3 = C \wedge \neg A \wedge \neg B$

- 1- Montrer que chacune des formules $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ est satisfaite? Sont elles valides? **(1.5pt)**
 φ_1 **Satisfaite** pour $V(A,B,C) = (1,0,0)$ mais **n'est pas valide**.
 φ_2 **Satisfaite** pour $V(A,B,C) = (0,1,0)$ mais **n'est pas valide**.
 φ_3 **Satisfaite** pour $V(A,B,C) = (0,0,1)$ mais **n'est pas valide**.

2- Les ensembles suivants sont-ils compatibles? **(2pts)**

- $\Sigma_1 = \{\varphi_1, \varphi_2\}$: **incompatible**
 $\Sigma_2 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$: **incompatible**
 $\Sigma_3 = \{\varphi_1, \neg\varphi_2\}$: **compatible** pour $V(A,B,C) = (1,0,0)$
 $\Sigma_4 = \{\varphi_1, \neg\varphi_2, \neg\varphi_3\}$ **compatible** pour $V(A,B,C) = (0,0,0)$

3- Que peut-on dire de la formule $\varphi = \neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2 \vee \neg\varphi_3$. **(1.5pt)**

- $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$: incompatible $\rightarrow \neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3)$ est **valide** $\rightarrow \neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2 \vee \neg\varphi_3$ est **valide**
 $\rightarrow \neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2 \vee \neg\varphi_3$ est une **tautologie**

Exercice 3 (04 pts): Formuler en logique d'ordre 1 les phrases suivantes en utilisant les prédicats : H, M, P, A.

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| H(x) : x est un humain. | M(x,y) : x est la mère de y. |
| P(x,y) : x est le père de y. | A(x,y) : x aime y. |

- Chaque humain aime ses enfants. **(1pt)**
 $\forall x (H(x) \Rightarrow \forall y (P(x,y) \vee M(x,y) \Rightarrow A(x,y)))$
- Chaque humain aime sa mère. **(1pt)**
 $\forall x (H(x) \Rightarrow (M(y,x) \Rightarrow A(x,y)))$
- Ali et Adel ont les mêmes parents. **(2pts)**
 $M(x_1, \text{Ali}) \wedge M(x_2, \text{Adel}) \wedge P(y_1, \text{Ali}) \wedge P(y_2, \text{Adel}) \Rightarrow (x_1 \equiv x_2 \wedge y_1 \equiv y_2)$

Exercice 4 (06.5 pts):

Soit L est un langage de premier ordre défini par :

- Les constantes : c1, c2.
- Les symboles de fonctions : F/1, G/2, H/2
- Les symboles de prédicats : P/2

Soit S = (N, {0,1}, {carrée, produit, somme}, {>}) une structure pour L

$$V(x,y) = (2, 3)$$

1) Donner l'interprétation par rapport à S et V des termes suivants : (3.5 pts)

$$T1 = F(G(c1, H(x,y))) : [T1]_{S,V} = (0 * (2+3))^2 = 0 \quad (0.75 \text{ pt})$$

$$T2 = F(H(c1, G(x,y))) : [T2]_{S,V} = (0 + (2*3))^2 = 36 \quad (0.75 \text{ pt})$$

$$T3 = G(F(y, c2)) \quad \text{n'est pas un terme (Problème d'arité pour F et G)} \quad (1 \text{ pt})$$

$$T4 = P(c1, c2) \quad \text{n'est pas un terme c'est une formule (P : prédicat)} \quad (1 \text{ pt})$$

2) Donner l'interprétation par rapport à S et V des formules suivantes : (3 pts)

$$\phi 1 = P(x,y) \Rightarrow P(F(x),y) \equiv y \quad \text{n'est pas une formule}$$

$$\phi 2 = \forall y \exists x P(x,y) \Rightarrow P(F(x),y) \quad [\phi 2]_{S,V} = 1 \text{ (vraie)}$$

$$\phi 3 = \forall y \exists x P(x,y) \Rightarrow H(F(x),y) \equiv y \quad [\phi 3]_{S,V} = 1 \text{ (vraie)}$$