

Questions de cours : (12 points)

- a ► Voir Polycopié du Cours page 19. (1 pt)
- b ► Voir Polycopié du Cours page 52. (2pts)
- c ► Voir Polycopié du Cours page 49 et page 53. (2,5pts)
- d ► Voir Polycopié du Cours page 70. (1,5pts)
- e ► Voir Polycopié du Cours pages 71-72. (2 pts + 2 pts + 1 pt = 5 pts)

Exercice : (8 points)

a) $E = M\varepsilon_0 = N_+(-\varepsilon_0) + N_+(+\varepsilon_0) \rightarrow M = N_+ - N_-$ et $N = N_+ + N_-$, $N_+ = (N + M)/2$ et $N_- = (N - M)/2$

- d'où $W_M = \left(\frac{N!}{((N-M)/2)!((N+M)/2)!} \right)$ et $S(E) = k_B \ln(W_M)$ (1pt)

- $\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial M}{\partial E} \frac{\partial S}{\partial M} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial S}{\partial M} = \frac{k_B}{2\varepsilon_0} \ln \left(\frac{N-M}{N+M} \right)$ ($T(E) \geq 0$ pour $(E < 0$ ou $M < 0)$) (1pt)

- $\frac{N-M}{N+M} = \exp \left(\frac{2\varepsilon_0}{k_B T} \right) \frac{1}{T} \Rightarrow E = M\varepsilon_0 = -N\varepsilon_0 \tanh \left(\frac{\varepsilon_0}{k_B T} \right)$ (1pt)

- $C = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right) = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right) = Nk_B \left(\frac{\varepsilon_0}{k_B T} \right)^2 \frac{1}{\cosh^2 \left(\frac{\varepsilon_0}{k_B T} \right)}$ (1pt)

b) Les spins sont indépendants les uns des autres : $Z_N = (Z_1)^N$

$Z_1 = \exp(-\beta\varepsilon_0) + \exp(+\beta\varepsilon_0) = 2 \cosh(\beta\varepsilon_0) \Rightarrow Z_N = [2 \cosh(\beta\varepsilon_0)]^N$

$\beta F = -\ln(Z) = -N \ln[2 \cosh(\beta\varepsilon_0)] \Rightarrow F(T, V, N) = -Nk_B T \ln \left[2 \cosh \left(\frac{\varepsilon_0}{k_B T} \right) \right]$ (1pt)

- l'énergie interne, (1pt) $U = \left. \frac{\partial \left(\frac{F}{T} \right)}{\partial \left(\frac{1}{T} \right)} \right|_{V, N} = -N\varepsilon_0 \tanh \left(\frac{\varepsilon_0}{k_B T} \right)$

- l'entropie, (1pt) $S = (U - F)/T$

- la chaleur spécifique et (1pt) $C = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right) = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right) = Nk_B \left(\frac{\varepsilon_0}{k_B T} \right)^2 \frac{1}{\cosh^2 \left(\frac{\varepsilon_0}{k_B T} \right)}$