Université Larbi Ben M'hidi - Oum El Bouaghi

Mastrer 1 - Mathématiques Appliquées **Année universitaire 2019/2020**

Examen d'Analyse fonctionnelle 1

Solution 1

1. *Caractérisation séquentielle de la compacité dans un espace métrique. Une partie K d'un espace métrique est compacte si et seulement si de toute suite de K on peut extraire une sous-suite convergente dans K.*

2. *Soit A une partie fermée dans un espace métrique compact X, et soit $(x_n)_n$ une suite d'élements de A. Comme X est compact, alors $(x_n)_n$ admet une sous-suite $(x_{n_k})_k$ qui converge vers une limite $x \in X$. Cette limite est dans A du moment que A est fermée.*
Bilan. Toute suite de A admet une sous-suite qui converge dans A. Par conséquent, A est compacte.

3. *Supposons qu'un espace normé E possède une boule compacte $B'(x_0, r)$, de rayon $r > 0$. Comme toutes les boules fermées dans un espace normé sont homéomorphes entre-elles, on en déduit que la boule unité fermée $B'(0, 1)$ est aussi compacte. Ceci entraîne que E est de dimension finie en vertu du théorème de finitude de F. Riesz.*

4. *Soit E un espace normé de dimension infinie. Montrons que tout compact de E est d'intérieur vide. Supposons que K est un compact de E d'intérieur non vide. Soit x_0 un point intérieur de K. Alors K contient une boule $B(x_0, r)$, de rayon $r > 0$. Il s'en suit que $B'(x_0, r) \subset K$ puisque ce dernier est fermé. Etant fermée dans un compact, $B'(x_0, r)$ est compacte en vertu du résultat de la question n°2, et par conséquent E est de dimension finie d'après le résultat de la question précédente.*

Solution 2

1. *Supposons que les applications continues $f, g : X \to Y$ coïncident sur une partie D de X. Soit $x \in \overline{D}$ arbitraire, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D de limite x. Comme f et g sont continues et $f(x_n) = g(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il s'ensuit par passage à la limite $f(x) = g(x)$. Ainsi, f et g coïncident sur $\overline{D}$.*

2. *Pour tout $f \in E = C([0, 1], \mathbb{R})$, on pose*
$$\|f\|_\phi = \int_0^1 |f(x)|\, \phi(x)dx,$$
où ϕ est une fonction continue, positive ou nulle sur $[0, 1]$ à valeurs réelles.

a) *La fonction* $x \mapsto |f(x)|\,\phi(x)$ *est continue donc intégrable sur le compact* $[0,1]$. *Comme elle est à valeurs positives ou nulles sur* $[0,1]$, *son intégrale est positive ou nulle. Par conséquent,* $\|\cdot\|_\phi : E \to \mathbb{R}^+$ *est bien définie.*
On vérifie immédiatement que

$$\|\lambda f\|_\phi = |\lambda|\,\|f\|_\phi \quad \text{et} \quad \|f+g\|_\phi \le \|f\|_\phi + \|g\|_\phi$$

pour tous $f, g \in E$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Il reste à prouver la véracité de l'implication*

$$\|f\|_\phi = 0 \implies f = 0.$$

On suppose que $\phi^{-1}(\mathbb{R}^*)$ *est dense dans* $[0,1]$. *Si* $\|f\|_\phi = 0$ *alors pour tout* $x \in [0,1]$, *on a* $f(x)\phi(x) = 0$ *du moment que la fonction* $x \mapsto |f(x)|\,\phi(x)$ *est continue à valeurs positives ou nulles sur* $[0,1]$. *Ceci entraîne que pour tout* $x \in \phi^{-1}(\mathbb{R}^*)$, *on a* $f(x) = 0$ *puisque* $\phi(x) \neq 0$. *Enfin, comme la fonction* f *est nulle sur la partie* $\phi^{-1}(\mathbb{R}^*)$ *dense dans* $[0,1]$, *cette fonction est nulle sur* $[0,1]$ *d'après le résultat de la question précédente.*

b) *On suppose désormais que* ϕ *ne s'annule en aucun point de* $[0,1]$. *Montrons que* $\|\cdot\|_\phi$ *est équivalente à la norme* $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$.
D'abord, comme ϕ *est continue sur* $[0,1]$, *elle y est bornée et atteint ses bornes. Soit* $a, b \in [0,1]$ *tels que* $\phi(a) \le \phi(x) \le \phi(b)$ *pour tout* $x \in [0,1]$. *Or,* $\phi(x) > 0$ *pour tout* $x \in [0,1]$, *d'où* $\phi(a) > 0$.
Pour tout $f \in E$, *on a*

$$\int_0^1 |f(x)|\,\phi(a)dx \le \int_0^1 |f(x)|\,\phi(x)dx \le \int_0^1 |f(x)|\,\phi(b)dx,$$

i.e.,

$$\phi(a)\,\|f\|_1 \le \|f\|_\phi \le \phi(b)\,\|f\|_1\,,$$

d'où l'équivalence des normes $\|\cdot\|_1$ *et* $\|\cdot\|_\phi$.

Solution 3

1. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et soit* $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n+1})$. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $x + \frac{1}{n+1} \longrightarrow x$ *quand* $n \to \infty$. *Par continuité de* f, *on obtient* $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n+1}) \longrightarrow f(x)$ *et donc la suite* $(f_n)_n$ *converge simplement vers* f.

2. *Supposons maintenant que* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est uniformément continue. Soit* $\varepsilon > 0$. *Par définition de l'uniforme continuité, il existe* $\alpha > 0$ *tel que si* $|x - y| \le \alpha$ *alors* $|f(x) - f(y)| \le \varepsilon$.

D'autre part, comme $\frac{1}{n+1}$ *tend vers* 0*, il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que, pour tout* $n \geq N$*, on ait* $\frac{1}{n+1} \leq \alpha$*. Mais alors,* $\left|x - (x + \frac{1}{n+1})\right| \leq \alpha$ *et donc*

$$\forall n \geq N,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f_n(x)| = \left|f(x) - f(x + \frac{1}{n+1})\right| \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que la suite $(f_n)_n$ *converge uniformément vers* f*.*

Solution 4 *Etant donné* $a > 0$*, on munit l'espace* $E = C([0,a], \mathbb{R})$ *de la norme de la convergence uniforme* $\|\cdot\|_\infty$*. Pour toute fonction* $x \in E$*, on pose*

$$T(x)(t) = 1 + \int_0^t x(s)ds, \quad \forall t \in [0,a].$$

1. $T(x) \in E$ *si* $x \in E$ *car toute primitive d'une fonction continue est encore une fonction continue. Ceci montre que* T *applique* E *dans* E*.*
   Montrons que l'application $T : E \to E$ *est* a*-lipschitzienne. Par définition de la norme de la convergence uniforme, pour tous* $x, y \in E$ *et* $t \in [0,a]$*, on a*

   $$|T(x)(t) - T(y)(t)| = \left|\int_0^t (x(s) - y(s))\, ds\right| \leq \int_0^t |x(s) - y(s)|\, ds \leq a \|x - y\|_\infty,$$

   d'où il s'en suit que

   $$\|T(x) - T(y)\|_\infty \leq a \|x - y\|_\infty.$$

2. *On suppose désormais que* $a < 1$*. L'application* T *est donc une contraction de l'espace* E*. Comme ce dernier est un espace de Banach, on en déduit grâce au théorème du point fixe de contraction, qu'il existe un unique* $x_\infty \in E$ *tel que* $T(x_\infty) = x_\infty$*.*

3. *Pour tout* $t \in [0,a]$*, on a* $x_\infty(t) = 1 + \int_0^t x_\infty(s)ds$*. Alors,* $x_\infty \in C^1([0,a], \mathbb{R})$ *comme primitive de la fonction continue* x_∞*. On peut donc dériver les deux membres de l'équation intégrale par rapport à* t *pour obtenir* $x'_\infty(t) = x_\infty(t)$*, pour tout* $t \in [0,a]$*. Enfin, en mettant* $t = 0$ *dans l'équation intégrale, on obtient* $x_\infty(0) = 1$*. On en conclut que* x_∞ *est l'unique solution du problème différentiel (de Cauchy)*

   $$\begin{cases} x \in C^1([0,a], \mathbb{R}), \\ x'(t) = x(t), \quad t \in [0,a], \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

   i.e., $x_\infty(t) = e^t$*.*

4. *Posons* $P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$ *pour* $n \in \mathbb{N}$. *D'après le théorème du point fixe de contraction, pour tout choix du point initial* $x_0 \in E$, *la suite récurrente* $x_n = T(x_{n-1}), n \geq 1$ *converge (pour la norme* $\|\cdot\|_\infty$, *i.e.) uniformément vers* $x_\infty = \exp$. *Prenons* $x_0(t) = P_0(t) = 1$. *On a alors*

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1 + \int_0^t x_0(s)ds = 1 + \int_0^t ds = 1 + t = P_1(t), \\ x_2(t) &= 1 + \int_0^t x_1(s)ds = 1 + \int_0^t (1+s)ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} = P_2(t). \end{aligned}$$

Supposons que $x_n(t) = P_n(t)$, *alors*

$$x_{n+1}(t) = 1 + \int_0^t x_n(s)ds = 1 + \int_0^t P_n(s)ds = 1 + \sum_{k=0}^{n} \int_0^t \frac{s^k}{k!}ds = 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{t^k}{k!},$$

i.e., $x_{n+1}(t) = P_{n+1}(t)$.
D'après le principe de récurrence, on déduit que $x_n = P_n$ *pour tout* $n \geq 1$, *d'où le résultat.*