Université Larbi ben m'hidi, Oum el Bouaghi

Master 1 Mathématique — Option : Mathématiques Appliquées

Module: Programmation Linéaire — Correction de l'examen 2020

Solution d'Exercice 1 : a)

MINIMISER: $Z = -3 X_1 - 2 X_2 - 4 X_3$

sous les contraintes

$1 X_1 + 1 X_2 + 2 X_3 \leq 4$
$2 X_1 + 3 X_2 + 0 X_3 \leq 5$
$2 X_1 + 1 X_2 + 3 X_3 \leq 7$
$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

MAXIMISER: $Z = 3 X_1 + 2 X_2 + 4 X_3$

sous les contraintes

$1 X_1 + 1 X_2 + 2 X_3 + 1 X_4 = 4$
$2 X_1 + 3 X_2 + 1 X_5 = 5$
$2 X_1 + 1 X_2 + 3 X_3 + 1 X_6 = 7$
$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0$

Tableau 1			3	2	4	0	0	0
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**	**P_6**
P_4	0	4	1	1	2	1	0	0
P_5	0	5	2	3	0	0	1	0
P_6	0	7	2	1	3	0	0	1
Z		0	-3	-2	-4	0	0	0

Tableau 2			3	2	4	0	0	0
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**	**P_6**
P_3	4	2	1 / 2	1 / 2	1	1 / 2	0	0
P_5	0	5	2	3	0	0	1	0
P_6	0	1	1 / 2	-1 / 2	0	-3 / 2	0	1
Z		8	-1	0	0	2	0	0

Tableau 3			3	2	4	0	0	0
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**	**P_6**
P_3	4	1	0	1	1	2	0	-1
P_5	0	1	0	5	0	6	1	-4
P_1	3	2	1	-1	0	-3	0	2
Z		10	0	-1	0	-1	0	2

Tableau 4			3	2	4	0	0	0
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**	**P_6**
P_3	4	4 / 5	0	0	1	4 / 5	-1 / 5	-1 / 5
P_2	2	1 / 5	0	1	0	6 / 5	1 / 5	-4 / 5
P_1	3	11 / 5	1	0	0	-9 / 5	1 / 5	6 / 5
Z		51 / 5	0	0	0	1 / 5	1 / 5	6 / 5

La solution optimale est $Z = -51 / 5$, $X_1 = 11 / 5$, $X_2 = 1 / 5$; $X_3 = 4 / 5$.

b)

MAXIMISER: $Z = 1 X_1 -1 X_2$

sous les contraintes

$1 X_1 + 1 X_2 \geq 5$
$3 X_1 -2 X_2 = 4$

$X_1, X_2 \geq 0$

MAXIMISER: $Z = 1 X_1 -1 X_2$

sous les contraintes

$1 X_1 + 1 X_2 -1 X_3 + 1 X_5 = 5$
$3 X_1 -2 X_2 + 1 X_4 = 4$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$

Tableau 1			0	0	0	-1	-1
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**
P_5	-1	5	1	1	-1	0	1
P_4	-1	4	3	-2	0	1	0
Z		-9	-4	1	1	0	0

Tableau 2			0	0	0	-1	-1
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**
P_5	-1	11 / 3	0	5 / 3	-1	-1 / 3	1
P_1	0	4 / 3	1	-2 / 3	0	1 / 3	0
Z		-11 / 3	0	-5 / 3	1	4 / 3	0

Tableau 3			0	0	0	-1	-1
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**
P_2	0	11 / 5	0	1	-3 / 5	-1 / 5	3 / 5
P_1	0	14 / 5	1	0	-2 / 5	1 / 5	2 / 5
Z		0	0	0	0	1	1

Il y a une solution possible au problème, nous pouvons donc passer à la Phase II pour le calcul.

Tableau 1			1	-1	0
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**
P_2	-1	11 / 5	0	1	-3 / 5
P_1	1	14 / 5	1	0	-2 / 5
Z		3 / 5	0	0	1 / 5

La solution optimale est Z = 3 / 5
X1 = 14 / 5
X2 = 11 / 5

$$B : \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}, inverse : \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \ sbr$$

$$\overline{Chb} = Chb - C_b \cdot Ab \cdot Ahb = \left((1) - \begin{pmatrix} -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = 8$$

Correction d'exercice 2: (5 pts)
Une plaque de superficie de 200 cm^2 peut être découpe de façons:
M1. Une plaque de superficie de 150 cm^2 et une plaque de superficie de 40 cm^2; les chutes seront de 10 cm^2.
M2. 2 plaques de superficie de 70 cm^2 et une plaque de superficie de 40 cm^2; les chutes seront de 20 cm^2.
M3. Une plaque de superficie de 70 cm^2 et 3 plaques de superficie de 40 cm^2; les chutes seront de 20 cm^2.
M4. 5 plaque de superficie de 40 cm^2; les chutes seront de 0 cm^2.
soit x_i le nombre de plaques à deouper par la façons i; alors le programme s'écrit

$$(P) : \begin{cases} \min W = 10x_1 + 20x_2 + 20x_3 \\ x_1 \geq 15 \\ 2x_2 + x_3 \geq 32 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \geq 56 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Correction d'exercice 3: (2.5 pts) : soient x, y les nombres d'hectares de tomates et piments respectivement; alors le programme s'écrit

$$(P) : \begin{cases} \max Z = 1000x + 2000y \\ x + y \leq 150 \\ 2x + 5y \leq 480 \\ 4x + 3y \leq 550 \\ x \leq 100 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$