Université L'arbi ben M'hidi Oum El Bouaghi **Le 01/02/2020**
Faculté de sciences exactes et de sciences de la nature et de la vie
Département de mathematiques **$2^{ème}$ année**
Matière: ALGEBRE 3

Correction du Contrôle N°1

Exercise 1 ***(02 pts)*** *$f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme*
1) $\ker f$ est un sous espace invariant par f car:

Soit $v \in \ker f \Longrightarrow f(v) = 0 \Longrightarrow f(v) \in \ker f$ car $0 \in \ker f$, donc $f(\ker f) \subset \ker f$....... $\boxed{(1pt)}$

2) $\operatorname{Im} f$ est un sous espace invariant par f car:

Soit $u \in \operatorname{Im} f$, donc il existe $v \in E$, $f(v) = u$, d'où $f(u) = f(f(v)) \in \operatorname{Im} f$, donc $f(\operatorname{Im} f) \subset \operatorname{Im} f$....... $\boxed{(1pt)}$

Exercise 2 ***(04 pts)***

Le polynôme $P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$ est un polynôme annulateur de la matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$...... $\boxed{(0.5pt)}$
, donc il y a deux cas possibles du polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$:

1. $P_A(\lambda) = (\lambda + 1)^2$,................ $\boxed{(0.5pt)}$

2. $P_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$,.................... $\boxed{(0.5pt)}$

Si $P_A(\lambda) = (\lambda + 1)^2$, alors il y a deux cas possibles du polynôme minimal:

a) $m(\lambda) = (\lambda + 1)$, ... $\boxed{(0.25pt)}$
et la matrice A soit diagonalisable car $m(\lambda)$ a des racines simples, ... $\boxed{(0.25pt) + (0.25pt)}$

b) $m(\lambda) = (\lambda + 1)^2$ .... $\boxed{(0.25pt)}$
et la matric sera non diagonalisable car $m(\lambda)$ a des racines non simples...... $\boxed{(0.25pt) + (0.25pt)}$

Si $P_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$, alors le polynome minimal est $m(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$,...... $\boxed{(0.5pt)}$
d'où la matrice sera diagonalisable car $m(\lambda)$ a des racines simples, ou bien $A \in M_2(\mathbb{R})$ admet deux valeurs propres distincts........ $\boxed{(0.25pt) + (0.25pt)}$

Exercise 3 ***(05 pts)***
1) La base cannonique de l'espave vectoriel $\mathbb{R}_3[x]$ est l'ensemble: $\{1, x, x^2, x^3\}$, $(0.5pt)$
on determine la matrice A associée à f dans cette base

$f(1) = 1$... $\boxed{(0.25pt)}$

$f(x) = x + (x - 2) = 2x - 2$,............................... $\boxed{(0.25pt)}$

$f(x^2) = x^2 + (x - 2)(2x) = 3x^2 - 4x$,..................... $\boxed{(0.25pt)}$

$f(x^3) = x^3 + (x - 2)\,3x^2 = 4x^3 - 6x^2$,..................... $\boxed{(0.25pt)}$

$$\text{Alors } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \boxed{(05pt)}$$

On remarque que A est triangulaire, d'où $Sp(A) = \{1, 2, 3, 4\}$, c à d A admet 4 valeurs propres distincts, donc A est diagonalisable................. $\boxed{(0.5pt) + (0.5pt)}$

2) Les sous espaces propres,

$E_{\lambda=1} = Vect\{v,\ (A - I_4)\,v = 0_{\mathbb{R}^4}\} = Vect\{v_1\,(1,0,0,0)\} = Vect\{P_1\,(x) = 1\}$ ....$\boxed{(0.5pt)}$

$E_{\lambda=2} = Vect\{v,\ (A - 2I_4)\,v = 0_{\mathbb{R}^4}\} = Vect\{v_2\,(-2,1,0,0)\} = Vect\{P_1\,(x) = -2 + x\}$ ....$\boxed{(0.5pt)}$

$E_{\lambda=3} = Vect\{v,\ (A - 3I_4)\,v = 0_{\mathbb{R}^4}\} = Vect\{v_3\,(-4,4,-1,0)\} = Vect\left\{P_3\,(x) = -4 + 4x - x^2\right\}$ ....$\boxed{(0.5pt)}$

$E_{\lambda=4} = Vect\{v,\ (A - 4I_4)\,v = 0_{\mathbb{R}^4}\} = Vect\{v_4\,(-8,12,6,-1)\} = Vect\left\{P_4\,(x) = -8 + 12x + 6x^2 - x^3\right\}$ ....$\boxed{(0.5pt)}$

Exercise 4 ***(09 pts)***

$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix},$

1) le polynome caracteristique $P_A\,(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$

$= (4-\lambda)\left[(3-\lambda)^2 - 1\right] = (4-\lambda)\left[((3-\lambda)-1)\,((3-\lambda)+1)\right] = (2-\lambda)\,(4-\lambda)^2$ ....$\boxed{(1pt)}$

On calcule le polynôme minimal:

$(A - 2I_3)\,(A - 4I_3) = 0_3$,......$\boxed{(0.5pt)}$

alors $m\,(\lambda) = (2-\lambda)\,(4-\lambda)$,..................$\boxed{(0.5pt)}$

d'où A est diagonalisable car $m\,(\lambda)$ *a des racines simples*,.............$\boxed{(0.5pt) + (0.5pt)}$

2) Comme A admet des valeurs propres non nulles , alors $\det A = 2\times 4\times 4 = 32 \neq 0$, *donc A est inversible* ....$\boxed{(0.25pt) + (0.25pt)}$

D'apres la question 1, on a $(A - 2I_3)\,(A - 4I_3) = A^2 - 6A + 8I_3 = 0_3$, *alors,* $A\left(\frac{1}{8}\,(6I_3 - A)\right) = I_3$,...........$\boxed{(0.5pt)}$

ce qui implique que

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\,(6I_3 - A) = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \text{..........}\boxed{(0.5pt)}$$

3) la réduite de jordan est

$$J = J_1\,(2) \oplus J_1\,(4) \oplus J_1\,(4) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{............}\boxed{(1pt)}$$

4) On cherche les vecteurs propres

$E_{\lambda=2} = vect\{v,\ (A - 2I_3)\,v = 0_{\mathbb{R}^3}\} = vect\{v_1\,(1,-2,1)\}$ ....$\boxed{(0.5pt)}$.

$E_{\lambda=4} = vect\{v,\ (A - 4I_3)\,v = 0_{\mathbb{R}^3}\} = vect\{v_2\,(-1,0,1)\,,\ v_3\,(0,1,0)\}$ ....$\boxed{(1pt)}$

La solution du système différentiel $X' = AX$, *est donnée par la formule:* $X\,(t) = P \begin{bmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_2 e^{4t} \\ c_3 e^{4t} \end{bmatrix}$ ....$\boxed{(0.5pt)}$

donc

$$\begin{bmatrix} x_1\,(t) \\ x_2\,(t) \\ x_3\,(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_2 e^{4t} \\ c_3 e^{4t} \end{bmatrix} \text{............}\boxed{(1pt)}$$

càd $\begin{cases} x_1\,(t) = c_1 e^{2t} - c_2 e^{4t} \\ x_2\,(t) = -2c_1 e^{2t} + c_3 e^{4t} \\ x_3\,(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t} \end{cases}$ ....$\boxed{(0.5pt)}$