Université L'arbi ben M'hidi Oum El Bouaghi **Le 01/02/2020**
Faculté de sciences exactes et de sciences de la nature et de la vie
Département de mathematiques **$2^{ème}$ année**
Matière: ALGEBRE 3

Contrôle N°1

Exercise 1 ***(02 pts)*** *(Question de cours)*

Soit E un espaces vectoriel sur le corps $\mathbb{k}$, et soit f un endomorphisme de E.

1) Montrer que les sous espaces vectoriels, $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont invariants (stables) par f.

Exercise 2 ***(04 pts)***

1) Préciser tous les expressions possibles du polynôme caractéristique puis du polynôme minimal d'une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que

$$A^3+A^2-A-I_2=0_2$$

- Justifier les cas où A soit diagonalisable.

Exercise 3 ***(05 pts)***

Soit $E=\mathbb{R}_3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3, et soit $f:\mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$ définie par:

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[x], \quad f(P)=P+(x-2)P'.$$

1) Montrer que f est diagonalisable.

2) Déterminer les sous espaces propres.

Exercise 4 ***(09 pts)***

Soit la matrice $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

1) Calculer le polynôme minimal de A, A est elle diagonalisable?

2) A est elle inversible? si oui calculer A^{-1} D'aprés la question 1.

3) Donner la réduite de jordan.

4) Résoudre le système differentiel $X'=AX$.

Good luck