Université L'Arbi Ben Mhidi, Oum-El-Bouaghi
Faculté SENV, Département de M.I.

Contrôle de Logique Mathématique

30 Janvier 2020

Pr. Zekraoui Hanifa

---

1. **Exercice (3+3 points)**

   Rédiger une preuve mathématique qui montre que:

   (a) La fonction $f(x) = \begin{cases} 1-x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
   n'est pas continue dans l'intervalle $[0,1]$

   (b) Tout polynôme à terme constant non nul n'admet pas zéro comme racine.

2. **Exercice (3+3+3 points)**

   Soient P, Q et R trois propositions logiques.

   (a) Montrer que:
   $$(P \vee Q) \wedge (\rceil P \vee R) \vdash (Q \vee R)$$

   (b) La formule α est-elle une tautologie?
   $$\alpha : (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\rceil P \Rightarrow \rceil Q)$$

   (c) Que peut-on dire de la formule β
   $$\beta : (P \Leftrightarrow Q) \wedge (P \Leftrightarrow \rceil Q)$$

3. **Exercice (5 points)**

   À l'aide de quantificateurs, écrire les propositions suivantes :

   (a) Le carré de tout réel est positif.

   (b) Certains réels sont strictement supérieurs à leurs carrés.

   (c) f est une fonction réelle majorée.

   (d) Il existe un entier multiple de tous les autres.

   (e) Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

Solution du Contrôle de Logique Mathématique

Solution de l'exercice 1 (3+3 points)

a Définition 1 : *On dit qu'une fonction f définie sur un domaine D est continue dans un point $a \in D$ si*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a).$$

La fonction f est continue dans D si elle est continue dans chaque point de D.

Pour $f(x) = \begin{cases} 1 - x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ et $D = [0, 1]$, *on a*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 1 \neq 0 = f(0),$$

ce qui montre que f n'est pas continue dans 0. D'après la définition 1, f n'est pas continue dans l'intervale $[0, 1]$.

b Definition 2: *Soient $P(X) = a_n X^n + \cdots a_1 X + a_0$, avec $a_0 \neq 0$. On dit que P admet un élément c comme racine si $P(c) = 0$.*

Pour $c = 0$, on a $P(0) = a_0 \neq 0$. Ainsi 0 n'est pas une racine de tout polynôme à terme constant non nul.

Indication pour l'exercice 2 (3+3+3 points)

Il suffit d'établir les tables de vérité et appliquer les définitions de consiquence logique, tautologie, antilogie.

Remarque: Pour la troisième on peut avoir le résultat sans table de vérité comme suit:

$$((Q \Leftrightarrow P) \wedge (P \Leftrightarrow \rceil Q)) \Rightarrow (Q \Leftrightarrow \rceil Q)$$

qui est une antilogie, car une proposition et sa négation ne peuvent pas être vraie et fausse en même temps.

Solution de l'xercice 3 (5 points)

a $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0.$

b $\exists x \in \mathbb{R}, x > x^2.$

c $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M.$

d $\exists! m \in \mathbb{N}, (\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, m = nk).$

e $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y, \exists q \in \mathbb{Q}, x \leq q < y,$ (ou $x < q \leq y$).