لدينا $\sup_{n\geq 1} g_n = \underline{\lim}\, f_n$

بتطبيق نظرية التقارب الرتيب نجد

$$\sup \int_E g_n \, d\mu = \int_E \sup g_n \, d\mu = \int_E \underline{\lim}\, f_n \, d\mu \quad \text{---}(1) \quad (0.1)$$

ولدينا

$$\forall k \geq n : \int_E g_n \, d\mu \leq \int_E f_k \, d\mu \Rightarrow \forall n \geq 1 \int_E g_n \, d\mu \leq \inf_{k\geq n} \int_E f_k \, d\mu \quad (0.5)$$

$$\Rightarrow \sup_{n\geq 1} \int_E g_n \, d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n \, d\mu \Rightarrow \int_E \underline{\lim}\, f_n \leq \underline{\lim} \int_E f_n \, d\mu \quad (0.1)$$

II

بحيث $\{f_n\}_n \in \mathcal{M}(E,\mathcal{E})$ ، $\sum_{n\geq 1} \left(\int_E |f_n| \, d\mu \right) < +\infty$

بيان أن: (3 pts)

$$\sum_{n\geq 1} \left(\int_E f_n \, d\mu \right) = \int_E \left(\sum_{n\geq 1} f_n \right) d\mu$$

نضع $\forall x \in E : g(x) = \sum_{n\geq 1} |f_n(x)|$ ومنه لدينا

$$\sum_{n\geq 1} \int_E |f_n| \, d\mu = \int_E \sum_{n\geq 1} |f_n| \, d\mu = \int_E g \, d\mu < +\infty \Rightarrow \quad (0.5)$$

ومنه g منتهية μ- تقريبا أينما كان.

نضع $A = \{x \in E ; \sum_{n\geq 1} f_n(x) = +\infty\}$ إذن $\mu(A) = 0$ (0.5)

• ليكن f تطبيقا نأخذ قيمة كيفية في A ومعرف على A^c ب $f = \sum_{n\geq 1} f_n$

ومنه $f = \sum_{n\geq 1} f_n$ (0.5) تقريبا أينما كان وعليه $|f| \leq g$ μ- تقريبا أينما كان

* نعرف المتتالية $(g_n)_n$ كما يلي $\forall n \geq 1, \forall x \in E ; g_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$

إذن $(g_n)_n$ متتالية من $\mathcal{M}(E,\mathcal{E})$ ولدينا $\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = f$ μ-p.p

وكذلك (0.5) $\forall n \geq 1, \forall x \in E ; |g_n(x)| \leq g(x)$

بتطبيق نظرية التقارب المهيمن (T.C.D) نجد (0.5)

$$\sum_{n\geq 1} \int_E f_n \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_E f_i \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_E \sum_{i=1}^{n} f_i \, d\mu = \cancel{(*)}$$