$$\forall X \subset E;\ \mu^*(X) = \mu^*((\bigcup_{n\geq 1} E_n)\cap X) + \mu^*((\bigcup_{n\geq 1} E_n)^c\cap X)$$

حسب (**)
$$= \sum_{n\geq 1} \mu^*(E_n\cap X) + \mu^*((\bigcup_{n\geq 1} E_n)^c\cap X) \quad (0,5)$$

نأخذ $X = \bigcup_{n\geq 1} E_n$ نجد

$$\mu^*(\bigcup_{n\geq 1} E_n) = \sum_{n\geq 1} \mu^*(E_n). \quad (0,5)$$

وعليه فإن μ^* هو قياس موجب على D.

(3) μ^*_D هو قياس تام (1,5 pts)

لنتحقق $A\in D$ حيث $\mu^*(A)=0$، ولتكن $B\subset A$.

لدينا
$$\forall X \subset E;\ \mu^*(X) = \mu^*(X\cap(B\cup B^c)) \leq \mu^*(X\cap B) + \mu^*(X\cap B^c) \quad (1) \quad (0,5)$$

ولدينا من جهة أخرى

$$\begin{cases} (X\cap B)\subset B\subset A \Rightarrow \mu^*(X\cap B) \leq \mu^*(A) = 0 \\ (X\cap B^c)\subset X \Rightarrow \mu^*(X\cap B^c) \leq \mu^*(X) \end{cases} \quad (0,5)$$

ومنه
$$\mu^*(X\cap B) + \mu^*(X\cap B^c) = \mu^*(X\cap B^c) \leq \mu^*(X) \quad (2) \quad (0,5)$$

من (1) و(2) نجد أن $B\in D$ ومنه μ^* هو قياس تام على D.

(II) بيان أن $f|_A$ هو $(\Sigma\cap A, \Sigma')$-قيوس (1,5 pts)

ليكن J التباين القانوني لـ A في E.

$$(J^{-1}(\Sigma) = \Sigma\cap A) \Rightarrow (J \text{ هو تطبيق } (\Sigma\cap A, \Sigma)\text{-قيوس}) \quad (0,5)$$

ولدينا $f|_A = f\circ J$ (0,5) و f هو (Σ, Σ')-قيوس وبالتالي فإن

$f|_A$ هو $(\Sigma\cap A, \Sigma')$-قيوس (0,5)

3 (3pts)

التمرين الثالث: 06 نقاط

$\{f_n\}\in \mu^+(E, \mathcal{E})$.

(1) إثبات أن
$$\int_E \underline{\lim}\, f_n\, d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n\, d\mu$$

• نضع $\forall n\geq 1;\ g_n = \inf_{k\geq n} f_k$، إذن $(g_n)_n$ هي متتالية متزايدة من $\mu^+(E,\mathcal{E})$ (0,5)