$$\forall X\subset E;\ \mu^*((A\cup B)\cap X)+\mu^*((A\cup B)^c\cap X)=\mu^*(A\cap X)+\mu^*(A^c\cap B\cap X)+\mu^*(A^c\cap B^c\cap X)$$
$$=\mu^*(A\cap X)+\mu^*(B\cap(A^c\cap X))+\mu^*(B^c\cap(A^c\cap X))$$
$$=\mu^*(A\cap X)+\mu^*(A^c\cap X)=\mu^*(X).$$

0,5

وعليه $A\cup B\in \mathcal{D}$

• لتكن $\{E_n\}_n$ متتالية من $\mathcal{D}$. توجد متتالية $\{A_n\}_n$ من $\mathcal{D}$ عناصرها منفصلة مثنى مثنى تحقق

$$\bigcup_{n\geq 1}A_n=\bigcup_{n\geq 1}E_n \text{ و } \forall m\in\mathbb{N}^*: \bigcup_{i=1}^{m}A_i=\bigcup_{i=1}^{m}E_i$$

• إذا كان A و B منفصلتان من $\mathcal{D}$ فإنه حسب (*) لدينا

$$\forall X\subset E,\ \mu^*((A\cup B)\cap X)=\mu^*(A\cap X)+\mu^*(B\cap X)$$

وبالتراجع نجد

$$\forall X\subset E;\ \mu^*\Big(\big(\bigcup_{n\geq 1}A_n\big)\cap X\Big)=\sum_{n\geq 1}\mu^*(A_n\cap X)\ \dots(**)$$

0,5

لدينا

$$\forall m\in\mathbb{N}^*, \forall X\subset X: \mu^*(X)=\mu^*\Big(\big(\bigcup_{i=1}^{m}A_i\big)\cap X\Big)+\mu^*\Big(\big(\bigcup_{i=1}^{m}A_i\big)^c\cap X\Big)$$
$$\overset{\text{(خاصية التراجع)}}{=}\sum_{i=1}^{m}\mu^*(A_i\cap X)+\mu^*\Big(\big(\bigcup_{i=1}^{m}A_i\big)^c\cap X\Big)$$
$$\geq \sum_{i=1}^{m}\mu^*(A_i\cap X)+\mu^*\Big(\big(\bigcup_{i\geq 1}A_i\big)^c\cap X\Big)$$

ومنه

$$\forall X\subset E;\ \mu^*(X)\geq \sum_{n\geq 1}\mu^*(A_n\cap X)+\mu^*\Big(\big(\bigcup_{n\geq 1}A_n\big)^c\cap X\Big)$$
$$\overset{(**)}{=}\mu^*\Big(\big(\bigcup_{n\geq 1}A_n\big)\cap X\Big)+\mu^*\Big(\big(\bigcup_{n\geq 1}A_n\big)^c\cap X\Big)=\mu^*\Big(\big(\bigcup_{n\geq 1}E_n\big)\cap X\Big)$$
$$=\mu^*(X).$$

ومنه

$$\forall X\subset E;\ \mu^*(X)=\mu^*\Big(\big(\bigcup_{n\geq 1}E_n\big)\cap X\Big)+\mu^*\Big(\big(\bigcup_{n\geq 1}E_n\big)^c\cap X\Big)$$

0,5

وعليه $\big(\bigcup_{n\geq 1}E_n\big)$ تنتمي لـ $\mathcal{D}$.

2

2 μ^* هو قياس موجب (1,5 pts)

لتكن (E_n) متتالية من $\mathcal{D}$ عناصرها منفصلة مثنى مثنى.

بما أن $\mathcal{D}$ عشيرة فإن $\big(\bigcup_n E_n\big)\in\mathcal{D}$ ومنه

0,5