



يوم 01 فيفري 2020

السنة الثالثة رياضيات

امتحان القياس والمكاملة

تمرين أول (04 نقاط) هل القضايا الآتية صحيحة ؟ مع التعليل في حالة الخطأ.

- كل قياس موجب هو قياس خارجي و العكس ليس صحيحا.
- كل قياس موجب معرف على جبر ما، يمكن تمديده إلى قياس موجب وحيد معرف على العشيرة المولدة بهذا الجبر.
- كل مجموعة قيوسة بمفهوم لويغ هي مجموعة بوريلية من \mathbb{R} .
- التكامل المعمم $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ متقارب مطلقا اذا فقط اذا كان f -m كمولا.
- $\{f_n\}$ متتالية تطبيقات قيوسة موجبة $(\mu^+(E, \varphi))$ ، متناقصة و متقاربة ببساطة نحو تطبيق f ، إذن

$$\lim_n \left(\int_E f_n d\mu \right) = \int_E f d\mu$$

تمرين ثان (06 نقاط)

❖ لتكن E مجموعة غير خالية و μ^* قياس خارجي على E . نعرّف عائلة المجموعات D كما يلي

$$D = \{A \subset E; \mu^*(X) = \mu^*(A \cap X) + \mu^*(A^c \cap X), \forall X \subset E\}$$

بين أن

1. D هي عشيرة على E .
 2. اقتصار μ^* على العشيرة D هو قياس موجب تام.
- ❖ ليكن (E, Σ) و (E^-, Σ^-) فضاءين قيوسين، و f تطبيق من E في E^- و A جزء من E . بين أنه إذا كان $f \in (\Sigma, \Sigma^-)$ - قيوسا فإن اقتصار f على A هو $(\Sigma \cap A, \Sigma^-)$ - قيوس.