$(*) = \lim_{n\to+\infty}\int_E \varphi_n \, d\mu \overset{T.C.D}{=} \int_E f \, d\mu = \int_E \sum_{n\geq 1} f_n \, d\mu$ (0.5)

التمرين الرابع (04 نقاط)

(1pts)

1) (E,Σ,μ) فضاء قياس و $\{E_n\}_n$ متتالية متزايدة من Σ بحيث $E=\bigcup_{n\geq 1} E_n$

إثبات أن $\int_E f\,d\mu = \lim_n \int_{E_n} f\,d\mu$, $\forall f \in \mathcal{M}^+(E,\Sigma)$

نضع $f_n = f\chi_{E_n}$، نجد أن $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}^+(E,\Sigma)$، حيث $\{f_n\}_n$ متزايدة (0.5)

ولدينا $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$، ومنه حسب نظرية التقارب الرتيب لدينا

$\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n\,d\mu = \int_E \lim_{n\to+\infty} f_n\,d\mu = \int_E f\,d\mu$. (0.5)

2) (E,Σ,μ) فضاء قياس تام و $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$

بيان أن $f|_A \in \mathcal{M}(A, A\cap\Sigma)$ حيث A مجموعة مهملة (1.5pts)

نرمز بـ J التباين القانوني من A في E، عندئذ $f|_A = f\circ J$،

ليكن $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$، عندئذ $(f|_A)^{-1}(B) = J^{-1}(f^{-1}(B)) = A\cap f^{-1}(B)$. (0.5)

بما أن μ هو قياس تام ~~[illegible]~~ و $A\cap f^{-1}(B) \subset A \in A\cap\Sigma$ و $\mu(A)=0$ فإن

$A\cap f^{-1}(B) \in A\cap\Sigma$ لأنها تكتب من الشكل $A\cap\underbrace{(A\cap f^{-1}(B))}_{\in\Sigma}$ (0.5)

وعليه $(f|_A)^{-1}(\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})) \subset A\cap\Sigma$ ومنه $f|_A \in \mathcal{M}(A, A\cap\Sigma)$. (0.5)

3) البرهنة على أن $\mathcal{W} = \{B\subset E;\ A\cup B,\ A\setminus B,\ B\setminus A \in \Sigma\}$ صف رتيب و $A\in\Sigma$ (1.5pts)

لدينا $A\in\mathcal{W} \Rightarrow \mathcal{W}\neq\emptyset$

لتكن $\{E_n\}_n \subset \mathcal{W}$ متتالية متزايدة، عندئذ بما أن $\{A\cup E_n\}_{n\geq 1}\subset\Sigma$

هي متتالية متزايدة، وينتج من كون Σ صفا رتيبا

$A\cup\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) = \bigcup_{n\geq 1}(A\cup E_n) \in \Sigma$ (0.5)

2