جامعة العربي بن مهيدي – ام البواقي   قسم الرياضيات والاعلام الالي

المستوى : سنة اولى جذع مشترك   المدة : ساعة ونصف   التاريخ : 2020-02-01

امتحان السداسي الاول في مادة الجبر 1

تمرين 1 : (4 نقاط)

على $\mathbb{R}^2$ نعرف العلاقة $\mathcal{R}$ بـ : $(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow a^2+b^2=c^2+d^2$

1- برهن ان $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ.

2- اكتب اصناف التكافؤ $\overline{(a,b)}$.

تمرين 2 : (5 نقاط)

ليكن f تطبيق من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}^2$ معرف بـ : $f(x,y)=(x+y,x-y)$

1- هل f تقابل ؟ برر

ليكن g تطبيق من $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ نحو $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ معرف بـ : $g(x)= \frac{2x-1}{x+2}$

2- هل g تقابل ؟ برر

3- اوجد التطبيق العكسي g^{-1} ان وجد.

تمرين 3 : (6 نقاط)

نزود $A=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ بالقانونين الداخليين المعرفين بـ :

$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$ و $(x,y)*(x',y')=(xx',xy'+x'y)$

1- برهن ان $(A,+)$ زمرة تبديلية

2- ا) برهن ان القانون $*$ تبديلي وتجميعي.

ب) اوجد العنصر الحيادي لـ A بالقانون $*$.

ج) برهن ان $(A,+.*)$ حلقة واحدية تبديلية.

تمرين 4 : (5 نقاط)

لتكن المجموعة $B=\{m+n\sqrt{2}, m,n\in\mathbb{Z}\}$

1- برهن ان $(B,+,\times)$ حلقة جزئية من $(\mathbb{R},+,\times)$.

2- ليكن التطبيقφ المعرف من B نحو B حيث $\varphi(m+n\sqrt{2})=m-n\sqrt{2}$

برهن ان φ تشاكل ذاتي للحلقة $(B,+.\times)$.

بالتوفيق

Dr DJEDDI

Université Larbi ben M'hidi Oum EL Bouaghi
Département de Mathématiques et informatique

La date : 01-02-2020
1 ière année M&I

Examen : Algèbre 1

Exercice 1 : (4 points)

Sur $\mathbb{R}^2$, on considère la relation $\mathcal{R}$ définie par :

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

1- Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2- Décrire la classe d'équivalence $\dot{\overline{(a,b)}}$.

Exercice 2 : (5 points)

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $f(x,y) = (x+y, x-y)$

1) L'application f est-elle bijective? justifier

Soit g l'application de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ définie par : $g(x) = \frac{2x-1}{x+2}$

2) L'application g est-elle bijective? Justifier.
3) Donner s'il existe l'application réciproque g^{-1}.

Exercice 3 : (6 points)

On munit $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de deux lois internes définies par :

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y'), \ (x,y) * (x',y') = (xx', xy' + x'y)$$

1- Montrer que $(A,+)$ est un groupe commutatif.
2- a) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative.
   b) Déterminer l'élément neutre de A pour la loi $*$.
   c) Montrer que $(A,+.*)$ est un anneau unitaire et commutatif.

Exercice 4 : (5 points)

Soit l'ensemble $B = \{m + n\sqrt{2}, m, n \in \mathbb{Z}\}$

1- Montrer que $(B,+,\times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R},+,\times)$
2- Soit φ l'application de B dans B définie par
   $\varphi(m+n\sqrt{2}) = m - n\sqrt{2}$

Montrer que φ est un automorphisme de l'anneau $(B,+,\times)$.

Bonne chance

Dr DJEDDI